Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–4** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 5–6** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **03.04.2023** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3+4+1 = 8 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = x\mathrm{e}^{2x} .$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_\mathrm{p}(x)$ für $y'' - y' - 2y = x\mathrm{e}^{2x}$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' - y' - 2y = x\mathrm{e}^{2x}$.

Lösung.

(a) Die lineare Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1) .$$

Die Nullstellen von $p(X)$ sind 2 und -1. Das zugehörige Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{2x}, \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

(b) Die rechte Seite der Gleichung hat die Form $r(x)\mathrm{e}^{\mu x}$, wobei $r(x) = x$ ein Polynom von Grad 1 und $\mu = 2$ ist.

Da μ eine einfache Nullstelle von $p(X)$ ist, liegt der Resonanzfall vor mit $m = 1$. Wir setzen daher an:

$$f(x) = (ax+b)x\mathrm{e}^{2x} = (ax^2+bx)\mathrm{e}^{2x}.$$

Wir werten das charakteristische Polynom in $\mathrm{D} + \mu$ aus, wobei D der Differentialoperator ist.

Es gilt $p(X+2) = (X+2)^2 - (X+2) - 2 = (X+2-2)(X+2+1) = X^2 + 3X$ und daher $p(\mathrm{D}+2) = \mathrm{D}^2 + 3\mathrm{D}$.

Nun wenden wir $p(\mathrm{D}+2)$ auf den Polynomanteil $ax^2 + bx$ des Ansatzes an und setzen dies gleich mit dem Polynomanteil x der rechten Seite:

$$\begin{aligned} x &\overset{!}{=} p(\mathrm{D}+2)(ax^2+bx) \\ &= (\mathrm{D}^2+3\mathrm{D})(ax^2+bx) \\ &= 2a + 6ax + 3b. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{6}$ und $b = -\frac{1}{9}$.

Somit ist $f_\mathrm{p}(x) = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\right)\mathrm{e}^{2x}$ eine partikuläre Lösung.

Alternative Lösung.

Wir berechnen die Ableitungen des Ansatzes bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2ax+b)\mathrm{e}^{2x} + 2(ax^2+bx)\mathrm{e}^{2x} \;=\; \big(2ax^2+(2a+2b)x+b\big)\,\mathrm{e}^{2x} \\ f''(x) &= (4ax+2a+2b)\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,\big(2ax^2+(2a+2b)x+b\big)\,\mathrm{e}^{2x} \\ &= \big(4ax^2+(8a+4b)x+(2a+4b)\big)\,\mathrm{e}^{2x}\,. \end{aligned}$$

Wir setzen in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} x\mathrm{e}^{2x} &= (4ax^2+(8a+4b)x+(2a+4b))\,\mathrm{e}^{2x} - (2ax^2+(2a+2b)x+b)\,\mathrm{e}^{2x} - 2(ax^2+bx)\mathrm{e}^{2x} \\ &= (6ax+2a+3b)\,\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Gelten soll also: $6ax+2a+3b = x$.

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{6}$ und $b = -\frac{1}{9}$.

Somit ist $f_\mathrm{p}(x) = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\right)\mathrm{e}^{2x}$ eine partikuläre Lösung.

(c) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form

$$f(x) \;=\; f_\mathrm{p}(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \;=\; \left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{9}x\right)\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-x},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (2+2+4+3+1 = 12 Punkte)

Sei $J := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_2 \geqslant x_1 \right\}$.

Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurve K.

(b) Es soll K positiv orientiert parametrisiert werden. Zerlegen Sie dazu K in zwei geeignete Teilkurven K_1 und K_2 und parametrisieren Sie diese Teilkurven.

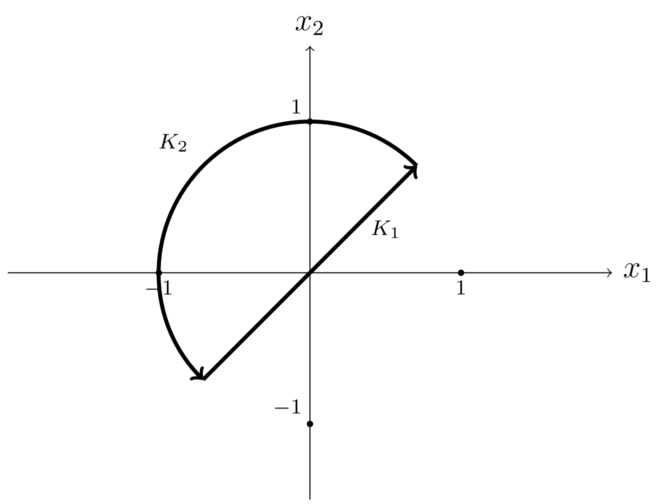
(c) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, K)$ als Kurvenintegral.

(d) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{div} g(x) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral. Verwenden Sie hierzu Polarkoordinaten.

(e) Verifizieren Sie in diesem Fall den Satz von Gauß.

Lösung.

(a) Skizze von $K = K_1 \cup K_2$:



(b) Wir zerlegen die Kurve K wie in (a) skizziert in zwei Teilkurven, $K = K_1 \cup K_2$.

Die Teilkurve K_1 parametrisieren wir mittels

$$C_1 \;:\; \left[-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \to \mathbb{R}^2 \;:\; t \mapsto C_1(t) = \begin{pmatrix} C_{1,1}(t) \\ C_{1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} .$$

Die Teilkurve K_2 parametrisieren wir mittels

$$C_2 \;:\; \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2 \;:\; t \mapsto C_2(t) = \begin{pmatrix} C_{2,1}(t) \\ C_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} .$$

(c) Der Ausfluss wird wie folgt berechnet.

$$\mathrm{A}(g,K) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} g(C_1(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,2}(t) \\ -C'_{1,1}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} g(C_2(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,2}(t) \\ -C'_{2,1}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t.$$

Für das erste Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} g(C_1(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,2}(t) \\ -C'_{1,1}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} t^2-t^2 \\ t\cdot t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} -t^2 \,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{3\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Für das zweite Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} g(C_2(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,2}(t) \\ -C'_{2,1}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \begin{pmatrix} \cos(t)^2-\sin(t)^2 \\ \cos(t)\sin(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(t)^3 \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $u := \sin(t)$ und $\mathrm{d}u = \cos(t)\mathrm{d}t$ wird

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(t)^3 \,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(t)(1-\sin(t)^2) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{u(\frac{\pi}{4})}^{u(\frac{5\pi}{4})} 1-u^2 \,\mathrm{d}u \\
&= \left[u - \tfrac{1}{3}u^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} = -\frac{5}{3\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Der gesamte Ausfluss ist also gegeben durch

$$\mathrm{A}(g,K) = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\,.$$

(d) Die Divergenz von g ist

$$\mathrm{div}(g(x)) = \mathrm{div}(g(x_1,x_2)) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 3x_1.$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechnen wir das Integral

$$\begin{aligned}
\iint_J \operatorname{div}(g(x))\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^1 3r\cos(\varphi)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(\varphi)\left(\int_0^1 3r^2\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(\varphi)[r^3]_0^1\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= [\sin(\varphi)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\
&= \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(e) Wir erhalten

$$\mathrm{A}(g,K) = -\sqrt{2} = \iint_J \operatorname{div}(g)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

Dies bestätigt den Satz von Gauß im vorliegenden Fall.

Aufgabe 3 (2+6 = 8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

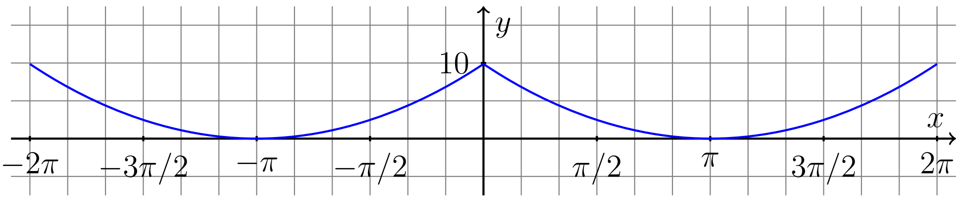
$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

Lösung.

(a) Skizze von $f(x)$:



(b) Es ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da f gerade ist.

Wir erhalten für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x-\pi)^2 \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\left[(x-\pi)^2 \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2(x-\pi) \frac{1}{n} \sin(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= -\frac{4}{\pi n} \int_0^\pi (x-\pi) \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{4}{\pi n} \left(\left[(x-\pi) \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{n} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= -\frac{4}{\pi n} \left(-\frac{\pi}{n} - \left[-\frac{1}{n^2} \sin(nx) \right]_0^\pi \right) \\
&= \frac{4}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

Für $n = 0$ ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x-\pi)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{3} (x-\pi)^3 \right]_0^\pi = \frac{2}{3} \pi^2\,.$$

Somit ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(kx)\,.$$

Aufgabe 4 (1+1+3+1 = 6 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \end{pmatrix} .$$

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $2\mathrm{i}$.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

(b) Geben Sie die Wronskimatrix $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ an und bestimmen Sie die Inverse $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1}$.

(c) Man bestimme eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ von $y' = Ay + \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \end{pmatrix}$.

(d) Man bestimme alle Lösungen von $y' = Ay + \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Wir schreiben $2\mathrm{i} = 0 + 2\mathrm{i}$ und

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Somit ergeben sich die linear unabhängigen Lösungen

$$f_{[1]}(x) = \mathrm{e}^0\left(\cos(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(2x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} ,$$

$$f_{[2]}(x) = \mathrm{e}^0\left(\sin(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(2x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} .$$

(b) Es ist

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x) = \left(f_{[1]}(x), f_{[2]}(x)\right) = \begin{pmatrix} -\sin(2x) & \cos(2x) \\ \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1} = \frac{1}{-\sin(2x)^2 - \cos(2x)^2}\begin{pmatrix} \sin(2x) & -\cos(2x) \\ -\cos(2x) & -\sin(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2x) & \cos(2x) \\ \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix} .$$

Alternative Lösung: Es ist

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1} &= \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1}\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(-x)\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin(2(-x)) & \cos(2(-x)) \\ \cos(2(-x)) & \sin(2(-x)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(2x) & \cos(2x) \\ \cos(2x) & -\sin(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(2x) & \cos(2x) \\ \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

(c) Ansatz mit Variation der Konstanten: $f_{\mathrm{p}}(x) = c_1(x) f_{[1]}(x) + c_2(x) f_{[2]}(x)$.

Es ist

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \end{pmatrix} \\
&= x \cdot \begin{pmatrix} -\sin(2x) & \cos(2x) \\ \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Somit können wir $c_1(x) = 0$ und $c_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ wählen.

Damit folgt

$$
f_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{2}x^2 \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}
$$

(d) Jede Lösung von $y' = Ay + \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \end{pmatrix}$ ist von der Form

$$
f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x^2 \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}}_{f_{\mathrm{p}}(x)} + \underbrace{d_1 \begin{pmatrix} -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}}_{f_{\mathrm{h}}(x)} ,
$$

wobei $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (2+1 = 3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten.

$$\mathcal{L}(\cosh(2t)) = \boxed{\frac{s}{s^2-4} \quad \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{s-2}+\tfrac{1}{s+2}\right) \text{ ist auch richtig.}}$$

$$\mathcal{L}(-t\cdot\cosh(2t)) = \boxed{-\frac{s^2+4}{(s^2-4)^2} \quad -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{(s-2)^2}+\tfrac{1}{(s+2)^2}\right) \text{ ist auch richtig.}}$$

(b) Finden Sie eine Funktion $f(t)$, für die $\mathcal{L}(f(t) * f(t)) = \dfrac{1}{(s-3)^2}$ ist.

$$f(t) = \boxed{e^{3t} \quad -e^{3t} \text{ ist auch richtig.}}$$

Aufgabe 6 (1+2 = 3 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = 4u_{xx}\,, \quad u(x,0) = f(x) = 3\cos(x)\,, \quad u_t(x,0) = g(x) = \cos(x)\,.$$

(a) Bestimmen Sie das Integral:

$$\int_{x-2t}^{x+2t} g(s)\,\mathrm{d}s = \boxed{\sin(x+2t)-\sin(x-2t) = 2\cos(x)\sin(2t)}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mittels der d'Alembertschen Formel:

$$u(x,t) = \boxed{\tfrac{1}{2}(3\cos(x-2t)+3\cos(x+2t)) + \tfrac{1}{4}(\sin(x+2t)-\sin(x-2t)) = 3\cos(x)\cos(2t) + \tfrac{1}{2}\cos(x)\sin(2t)}$$
