Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–4** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 5–6** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **16.10.2023** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3+3+2 = 8 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 9y \;=\; \mathrm{e}^{3x}\ .$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ für $y'' - 9y = \mathrm{e}^{3x}$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ für $y'' - 9y = \mathrm{e}^{3x}$.

Aufgabe 2 (2+2+4+3+1 = 12 Punkte)

Sei $J \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x_1 \leqslant 2\,,\; x_1^2 \leqslant x_2 \leqslant 4 \right\}$.

Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet.

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurve K.

(b) Es soll K positiv orientiert parametrisiert werden. Zerlegen Sie dazu K in drei geeignete Teilkurven K_1, K_2 und K_3 und parametrisieren Sie diese Teilkurven.

(c) Bestimmen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K)$ als Kurvenintegral.

(d) Bestimmen Sie $\displaystyle\iint_J \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(e) Verifizieren Sie in diesem Fall den Satz von Green.

Aufgabe 3 (2+6 = 8 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade 2π-periodische Funktion, die für $0 \leqslant x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{\pi} & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \text{falls } \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

Bitte wenden →

Aufgabe 4 (1+2+2+1 = 6 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ hat das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = (X-1)^2$.

(a) Sei $B := A - \mathrm{E}_2$. Sei $v := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Man bestimme das minimale $k \geqslant 0$ mit $B^k v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Man gebe ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$ an unter Verwendung von (a).
Man gebe die Wronskimatrix $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ an. Man bestimme ihre Inverse $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1}$.

(c) Man bestimme eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ von $y' = Ay + \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Man bestimme alle Lösungen von $y' = Ay + \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Name, Vorname: ____________ **Matrikelnummer:** ____________

Aufgabe 5 (2+1+1 = 4 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y \;=\; \mathrm{e}^{-t}$$

für $y = y(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Sei $f(t)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems.

(a) Sei $u(t)$ die Lösung von $y'' + 2y' + y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ von $y'' + 2y' + y = 0$:

$p(X) =$ ____________

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $U(s)$ zu $u(t)$:

$U(s) =$ ____________

(b) Bestimmen Sie $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s)) =$ ____________

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung: $f(t) = \mathrm{e}^{-t} * u(t) =$ ____________

Aufgabe 6 (2 Punkte) Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; u_{xx}\,,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) \;=\; 0, \quad u(\pi,t) = 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; \sin(2x) + 4\sin(3x) \qquad \text{für } x \in [0,\pi]\,.$$

Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt:

$u(x,t) \;=$ ____________