Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–4** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 5–6** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **16.10.2023** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3+3+2 = 8 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 9y \;=\; \mathrm{e}^{3x}\;.$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ für $y'' - 9y = \mathrm{e}^{3x}$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ für $y'' - 9y = \mathrm{e}^{3x}$.

Lösung.

(a) Die lineare Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^2 - 9 = (X-3)(X+3).$$

Die Nullstellen von $p(X)$ sind 3 und -3. Das zugehörige Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{3x}, \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^{-3x}.$$

(b) Die rechte Seite der Gleichung hat die Form $r(x)\mathrm{e}^{\mu x}$, wobei $r(x) = 1$ ein Polynom von Grad 0 und $\mu = 3$ ist.

Da μ eine einfache Nullstelle von $p(X)$ ist, liegt der Resonanzfall vor mit $m = 1$. Wir setzen daher an:

$$f(x) = ax\mathrm{e}^{3x}.$$

Wir werten das charakteristische Polynom in $\mathrm{D} + \mu$ aus, wobei D der Differentialoperator ist.

Es gilt $p(X+3) = (X+3)^2 - 9 = (X+3-3)(X+3+3) = X^2 + 6X$ und daher $p(\mathrm{D}+3) = \mathrm{D}^2 + 6\mathrm{D}$.

Nun wenden wir $p(\mathrm{D}+3)$ auf den Polynomanteil ax des Ansatzes an und setzen dies gleich mit dem Polynomanteil 1 der rechten Seite:

$$\begin{aligned} 1 &\overset{!}{=} p(\mathrm{D}+3)(ax) \\ &= (\mathrm{D}^2 + 6\mathrm{D})(ax) \\ &= 6a. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{6}$.

Somit ist $f_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{3x}$ eine partikuläre Lösung.

Alternative Lösung zu Bestimmung von a aus dem Ansatz.

Wir berechnen die Ableitungen des Ansatzes bis zur zweiten Ordnung:

$$f'(x) = a\mathrm{e}^{3x} + 3ax\mathrm{e}^{3x} \;=\; a\,(1+3x)\,\mathrm{e}^{3x}$$
$$f''(x) = 3a\mathrm{e}^{3x} + 3a\,(1+3x)\,\mathrm{e}^{3x} \;=\; 3a\,(2+3x)\,e^{3x}.$$

Wir setzen in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{3x} &= 3a\,(2+3x)\,\mathrm{e}^{3x} - 9ax\mathrm{e}^{3x}\\ &= 6a\mathrm{e}^{3x}\end{aligned}$$

Gelten soll also: $6a = 1$ und daher $a = \frac{1}{6}$.

Somit ist $f_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{3x}$ eine partikuläre Lösung.

Alternative Lösung zu (b)*: Variation der Konstanten.*

Mit (a) erhalten wir die Wronski-Matrix

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{-3x} \\ 3\mathrm{e}^{3x} & -3\mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix}$$

und ihre Inverse

$$\mathrm{W}(x)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{3x}\cdot(-3\mathrm{e}^{-3x}) - 3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{-3x}} \begin{pmatrix} -3\mathrm{e}^{-3x} & -\mathrm{e}^{-3x} \\ -3\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{-3x} & \mathrm{e}^{-3x} \\ 3\mathrm{e}^{3x} & -\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz $f_\mathrm{p}(x) = d_1(x)f_1(x) + d_2(x)f_2(x)$. Hierzu wird

$$\begin{pmatrix} d_1'(x) \\ d_2'(x) \end{pmatrix} = \mathrm{W}(x)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{-3x} & \mathrm{e}^{-3x} \\ 3\mathrm{e}^{3x} & -\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{e}^{6x} \end{pmatrix}.$$

Somit können wir Stammfunktionen $d_1(x) = \frac{1}{6}x$ und $d_2(x) = -\frac{1}{36}\mathrm{e}^{6x}$ wählen. Wir erhalten die partikuläre Lösung

$$f_\mathrm{p}(x) \;=\; \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{36}\mathrm{e}^{3x}.$$

(c) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form

$$f(x) \;=\; f_\mathrm{p}(x) + c_1f_1(x) + c_2f_2(x) \;=\; \tfrac{1}{6}x\mathrm{e}^{3x} + c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2\mathrm{e}^{-3x},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Es ist $f'(x) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{3x} + 3c_1\mathrm{e}^{3x} - 3c_2\mathrm{e}^{-3x}$. Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$f(0) = c_1 + c_2 = 0,$$
$$f'(0) = \frac{1}{6} + 3c_1 - 3c_2 = 0,$$

und schließlich $c_1 = -\frac{1}{36}$, $c_2 = \frac{1}{36}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist daher

$$f(x) = \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{36}\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{36}\mathrm{e}^{-3x}.$$

Aufgabe 2 (2+2+4+3+1 = 12 Punkte)

Sei $J := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x_1 \leqslant 2\,,\ x_1^2 \leqslant x_2 \leqslant 4 \right\}$.

Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet.

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurve K.

(b) Es soll K positiv orientiert parametrisiert werden. Zerlegen Sie dazu K in drei geeignete Teilkurven K_1, K_2 und K_3 und parametrisieren Sie diese Teilkurven.

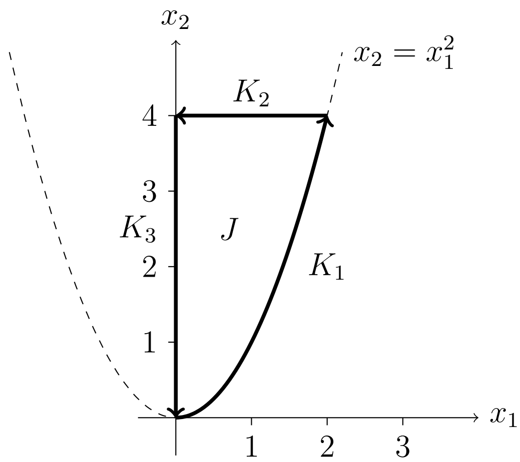
(c) Bestimmen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K)$ als Kurvenintegral.

(d) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(e) Verifizieren Sie in diesem Fall den Satz von Green.

Lösung.

(a) Skizze von $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$:



(b) Wir zerlegen die Kurve K wie in (a) skizziert in drei Teilkurven, $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$.

Die Teilkurve K_1 parametrisieren wir mittels

$$C_1 \;:\; [0\,,2] \to \mathbb{R}^2 \;:\; t \mapsto C_1(t) = \begin{pmatrix} C_{1,1}(t) \\ C_{1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} .$$

Die Teilkurve K_2 parametrisieren wir mittels

$$C_2 \;:\; [0\,,1] \to \mathbb{R}^2 \;:\; t \mapsto C_2(t) = \begin{pmatrix} C_{2,1}(t) \\ C_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2t \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Die Teilkurve K_3 parametrisieren wir mittels

$$C_3 \;:\; [0\,,1] \to \mathbb{R}^2 \;:\; t \mapsto C_3(t) = \begin{pmatrix} C_{3,1}(t) \\ C_{3,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4-4t \end{pmatrix} .$$

(c) Der Zirkulation wird wie folgt berechnet.

$$\mathrm{Z}(g,K) = \int_0^2 g(C_1(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,1}(t) \\ C'_{1,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 g(C_2(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,1}(t) \\ C'_{2,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 g(C_3(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{3,1}(t) \\ C'_{3,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t.$$

Für das erste Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(C_1(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,1}(t) \\ C'_{1,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int_0^2 \begin{pmatrix} t^3 \\ t+t^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 3t^3 + 2t^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 \right]_0^2 \\ &= 12 + \frac{16}{3} \\ &= \frac{52}{3} \,. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(C_2(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,1}(t) \\ C'_{2,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 8-8t \\ 6-2t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 -16 + 16t \,\mathrm{d}t \\ &= \left[-16t + 8t^2 \right]_0^1 \\ &= -16 + 8 \\ &= -8 \,. \end{aligned}$$

Für das dritte Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(C_3(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{3,1}(t) \\ C'_{3,2}(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4-4t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 -16 + 16t \,\mathrm{d}t \\ &= \left[-16t + 8t^2 \right]_0^1 \\ &= -16 + 8 \\ &= -8 \,. \end{aligned}$$

Die gesamte Zirkulation ist also gegeben durch

$$\mathrm{Z}(g,K) \;=\; \frac{52}{3} - 8 - 8 \;=\; \frac{4}{3} \,.$$

(d) Die Rotation von g ist

$$\operatorname{rot} g(x) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 1 - x_1 \,.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\iint_J \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 &= \int_0^2 \left(\int_{x_1^2}^4 1 - x_1\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^2 \left([x_2 - x_1 x_2]_{x_2 = x_1^2}^{x_2 = 4} \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^2 \left((4 - 4x_1) - (x_1^2 - x_1^3) \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \left[4x_1 - 2x_1^2 - \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{4}x_1^4 \right]_{x_1 = 0}^{x_1 = 2} \\
&= 8 - 8 - \frac{8}{3} + 4 \\
&= \frac{4}{3} \,.
\end{aligned}$$

(e) Wir erhalten

$$\mathrm{Z}(g, K) = \frac{4}{3} = \iint_J \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

Dies bestätigt den Satz von Green im vorliegenden Fall.

Aufgabe 3 (2+6 = 8 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade 2π-periodische Funktion, die für $0 \leqslant x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

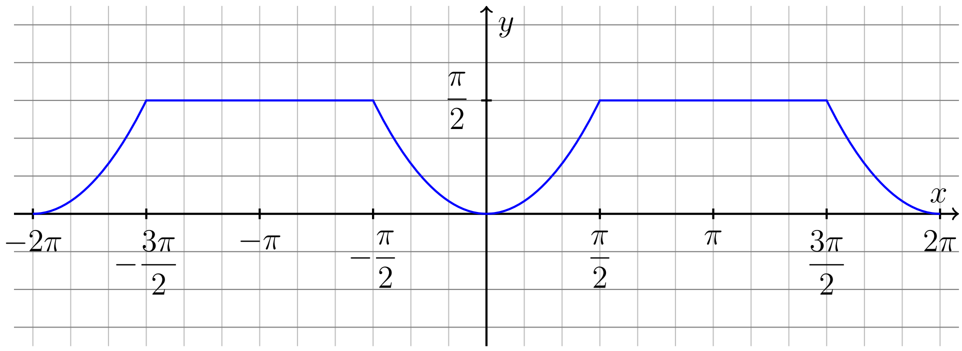
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{\pi} & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{falls } \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

Lösung.

(a) Skizze von $f(x)$:



(b) Es ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da f gerade ist.

Wir erhalten für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} x^2 \cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{4}{\pi^2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x \right) + \left[\frac{1}{n}\sin(nx) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{4}{\pi^2}\left(\left[x^2 \frac{1}{n}\sin(nx) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\frac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \right) - \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{8}{n\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{8}{n\pi^2}\left(\left[x\left(-\frac{1}{n}\cos(nx) \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= -\frac{8}{n\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) + \left[\frac{1}{n^2}\sin(nx) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
&= \frac{4}{n^2\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{8}{n^3\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) .
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch wie folgt umformen. Es ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{4}{n^2\pi}\cos\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) - \frac{8}{n^3\pi^2}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{1}{k^2\pi} & \text{falls } n = 2k \\ (-1)^k \dfrac{8}{(2k-1)^3\pi^2} & \text{falls } n = 2k-1. \end{cases}$$

Für $n = 0$ ist

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}x^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \left(\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

Somit ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch

$$\mathrm{Fourier}_f(x) \;=\; \frac{\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi}\cos\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) - \frac{8}{n^3\pi^2}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\right)\cos(nx)\,.$$

Alternativ kann man auch noch umformen zu:

$$\mathrm{Fourier}_f(x) \;=\; \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(2kx) + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^3}\cos((2k-1)x)\,.$$

Aufgabe 4 (1+2+2+1 = 6 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix $A := \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = (X-1)^2$.

(a) Sei $B := A - E_2$. Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man bestimme das minimale $k \geqslant 0$ mit $B^k v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Man gebe ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$ an unter Verwendung von (a).
Man gebe die Wronskimatrix $W_{\text{sys}}(x)$ an. Man bestimme ihre Inverse $W_{\text{sys}}(x)^{-1}$.

(c) Man bestimme eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ von $y' = Ay + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) Man bestimme alle Lösungen von $y' = Ay + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Es ist $B = A - E_2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Es wird

$$Bv = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es wird

$$B^2 v = B(Bv) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Also ist $k = 2$.

(b) Wir erhalten die folgenden linear unabhängigen Lösungen.

$$\begin{aligned} f_{[1]}(x) &= e^{1\cdot x} \left(\tfrac{x^0}{0!} B^{2-1} v \right) &&= e^x \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ f_{[2]}(x) &= e^{1\cdot x} \left(\tfrac{x^1}{1!} B^{2-1} v + \tfrac{x^0}{0!} B^{2-2} v \right) &&= e^x \begin{pmatrix} -4x+1 \\ 4x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da der Lösungraum Dimension 2 hat, bilden die linear unabhängigen Lösungen $f_{[1]}(x)$ und $f_{[2]}(x)$ ein Fundamentalsystem.

Die Wronski-Matrix dieser beiden Lösungen ist $W_{\text{sys}}(x) = e^x \begin{pmatrix} -4 & -4x+1 \\ 4 & 4x \end{pmatrix}$.

Es wird

$$W_{\text{sys}}(x)^{-1} = e^{-x} \begin{pmatrix} -4 & -4x+1 \\ 4 & 4x \end{pmatrix}^{-1} = e^{-x} \frac{1}{-16x-(-16x+4)} \begin{pmatrix} -4 & -4x+1 \\ 4 & 4x \end{pmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{4} e^{-x} \begin{pmatrix} -4x & -4x+1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} .$$

Alternativ kann man auch rechnen:

$$\begin{aligned} W_{\text{sys}}(x)^{-1} &= W_{\text{sys}}(0)^{-1} W_{\text{sys}}(-x) W_{\text{sys}}(0)^{-1} &&= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot e^{-x} \begin{pmatrix} -4 & -4(-x)+1 \\ 4 & 4(-x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} \begin{pmatrix} -4 & 4x+1 \\ 4 & -4x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} &&= \frac{1}{16} e^{-x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 4x+1 \\ 4 & -4x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} e^{-x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16x+4 & 16x \\ -16x & 4-16x \end{pmatrix} &&= \frac{1}{16} e^{-x} \begin{pmatrix} -16x & 4-16x \\ 16 & 16 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{4} e^{-x} \begin{pmatrix} -4x & -4x+1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Wir bestimmen eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz $f_\mathrm{p}(x) = c_1(x) f_{[1]}(x) + c_2(x) f_{[2]}(x)$. Hierzu wird

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \mathrm{W}_\mathrm{sys}(x)^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} -4x & -4x+1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Somit können wir Stammfunktionen $c_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$ und $c_2(x) = x$ wählen. Es wird

$$f_\mathrm{p}(x) = -\tfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} + x\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} -4x+1 \\ 4x \end{pmatrix} = x\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 1-2x \\ 2x \end{pmatrix} .$$

(d) Jede Lösung von $y' = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ 0 \end{pmatrix}$ ist also von der Form

$$f(x) = f_\mathrm{p}(x) + d_1 f_{[1]}(x) + d_2 f_{[2]}(x) = x\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 1-2x \\ 2x \end{pmatrix} + d_1\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} + d_2\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} -4x+1 \\ 4x \end{pmatrix} ,$$

wobei $d_1,\, d_2 \in \mathbb{R}$.

Name, Vorname:		**Matrikel-nummer:**	

Aufgabe 5 (2+1+1 = 4 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y \;=\; \mathrm{e}^{-t}$$

für $y = y(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Sei $f(t)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems.

(a) Sei $u(t)$ die Lösung von $y'' + 2y' + y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ von $y'' + 2y' + y = 0$:

$p(X) =$ $X^2 + 2X + 1$

$(X + 1)^2$ ist auch richtig.

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $U(s)$ zu $u(t)$:

$U(s) =$ $\dfrac{1}{(s+1)^2}$

$\frac{1}{s^2+2s+1}$ ist auch richtig.

(b) Bestimmen Sie $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s)) =$ $\mathrm{e}^{-t}\,t$

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung: $f(t) = \mathrm{e}^{-t} * u(t) =$ $\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; u_{xx}\;,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) \;=\; 0, \quad u(\pi,t) = 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; \sin(2x) + 4\sin(3x) \qquad \text{für } x \in [0,\pi]\;.$$

Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt:

$u(x,t) \;=$ $\sin(2x)\mathrm{e}^{-4t} + 4\sin(3x)\mathrm{e}^{-9t}$