Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 1

Hausaufgabe 1 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2,\ xy \leqslant 2 \}$.

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der x-Achse dar.

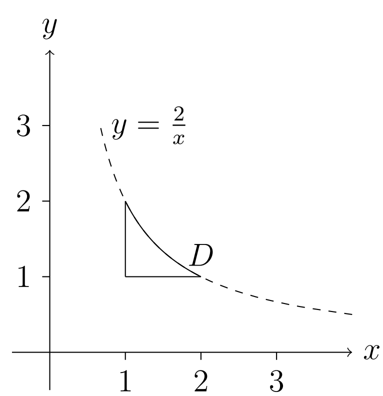
Berechnen Sie damit $\iint_D x^2 y \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(c) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y-Achse dar.

Berechnen Sie damit $\iint_D x^2 y \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Lösung.

(a) Der Bereich D ist in der Grafik hervorgehoben.



(b) Es ist $D = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2/x \}$ eine Darstellung als Normalbereich bezüglich der x-Achse.

Damit wird

$$\iint_D x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_1^{\frac{2}{x}} x^2 y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Wir berechnen die beiden Integrale:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\int_1^{\frac{2}{x}} x^2 y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x &= \int_1^2 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^{2/x} \mathrm{d}x = \int_1^2 x^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^3}{6} \right]_1^2 = 4 - \frac{8}{6} - 2 + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\,.\end{aligned}$$

(c) Es ist $D = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant y \leqslant 2,\ 1 \leqslant x \leqslant 2/y \}$ eine Darstellung als Normalbereich bezüglich der y-Achse.

Damit wird

$$\iint_D x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_1^{\frac{2}{y}} x^2 y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Wir berechnen die beiden Integrale:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_1^{\frac{2}{y}} x^2 y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_1^2 y \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^{\frac{2}{y}} \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{y}{3} \left(\frac{8}{y^3} - 1 \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3} \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \left[-\frac{8}{y} - \frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{3} \left(-\frac{8}{2} - 2 + 8 + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6}\,. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 2

Sei $K_1 := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + (y-2)^2 = 1,\ y \geqslant 2 \}$.
Sei $K_2 := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + (y-2)^2 = 1,\ y \leqslant 2 \}$.
Sei $K := K_1 \cup K_2$.

Das Integral $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$ darf im folgenden verwendet werden.

(a) Skizzieren Sie K_1, K_2 und K.

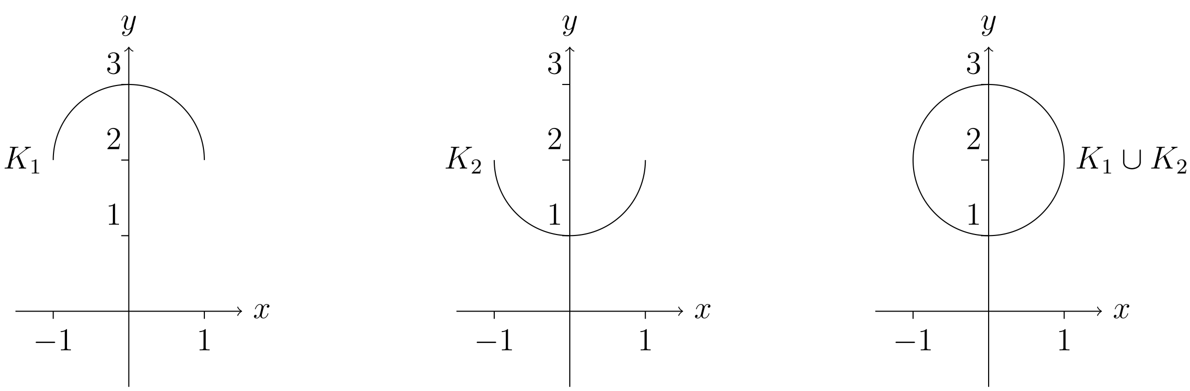
(b) Sei T_1 der Drehkörper, der durch Rotation von K_1 um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie das Volumen V_1 von T_1.

(c) Sei T_2 der Drehkörper, der durch Rotation von K_2 um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie das Volumen V_2 von T_2.

(d) Sei T der Torus, der durch Rotation von K um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie das Volumen $V = V_1 - V_2$ des Torus T.

Lösung.

(a) Die Skizzen der drei Kurven sind in den Abbildungen dargestellt.



(b) Die Kurve K_1 wird durch die Funktion

$$r_1(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}$$

beschrieben und wir können die Formel für das Volumen von Drehkörpern anwenden:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-1}^{1} r_1(x)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} \left(2 + \sqrt{1-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} \left(5 - x^2 + 4\sqrt{1-x^2}\right) \mathrm{d}x \\ &= 5\pi \left[x\right]_{-1}^{1} - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 4\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Das letzte Integral wird mit der Formel $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$ ausgewertet und erhalten

$$V_1 = 10\pi - \frac{2}{3}\pi + 2\pi^2 = \frac{28}{3}\pi + 2\pi^2.$$

(c) Die Kurve K_2 wird durch die Funktion

$$r_2(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2}$$

beschrieben, und wir können die Formel für das Volumen von Drehkörpern anwenden:

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-1}^{1} r_2(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} \left(2 - \sqrt{1 - x^2}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} \left(5 - x^2 - 4\sqrt{1 - x^2}\right) \mathrm{d}x \\ &= 5\pi \,[x]_{-1}^{1} - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} - 4\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Das letzte Integral wird mit der Formel $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$ ausgewertet und erhalten

$$V_2 = 10\pi - \frac{2}{3}\pi - 2\pi^2 = \frac{28}{3}\pi - 2\pi^2.$$

(d) Das Volumen des Torus ist $V = V_1 - V_2 = \frac{28}{3}\pi + 2\pi^2 - \frac{28}{3}\pi + 2\pi^2 = 4\pi^2$.

Hausaufgabe 3
Sei $D := [0,\pi] \times [0,\pi] = \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x_1 \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant \pi \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sei K die geschlossene Kurve, von der D berandet wird, positiv orientiert parametrisiert.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_2+x_1) \\ \cos(x_2-x_1) \end{pmatrix}$.

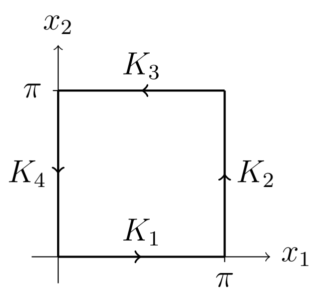
(a) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g,K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(b) Berechnen Sie $\iint_D \operatorname{rot} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(c) Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.

Lösung.
Wir betrachten den in der Abbildung dargestellten Bereich D und die positiv orientierte Kurve K, die ihn umschließt. Wir zerlegen die Kurve K wie folgt in vier Teilkurven:

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \,.$$



Für jede Teilkurve schreiben wir eine Parametrisierung

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0,\pi], \qquad C_2(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0,\pi],$$
$$C_3(t) = \begin{pmatrix} \pi - t \\ \pi \end{pmatrix} \quad t \in [0,\pi], \qquad C_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi - t \end{pmatrix} \quad t \in [0,\pi].$$

(a) Die Zirkulation wird durch Anwendung der Formel

$$Z(g,K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x = \sum_j \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(C(t)) \bullet\, C'(t)\,\mathrm{d}t$$

berechnet.

Für jede Teilkurve berechnen wir den Beitrag zur Zirkulation:

$$Z_1 = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t)\, \mathrm{d}t = -\left[\cos(t)\right]_0^\pi = 2$$

$$Z_2 = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin(t+\pi) \\ \cos(t-\pi) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(t-\pi)\, \mathrm{d}t = -\int_0^\pi \cos(t) dt = -\left[\sin(t)\right]_0^\pi = 0$$

$$Z_3 = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin(2\pi-t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t = -\int_0^\pi \sin(2\pi-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t)\, \mathrm{d}t = -\left[\cos(t)\right]_0^\pi = 2$$

$$Z_4 = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin(\pi-t) \\ \cos(\pi-t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t = -\int_0^\pi \cos(\pi-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(t)\, \mathrm{d}t = \left[\sin(t)\right]_0^\pi = 0$$

Daraus ergibt sich die Zirkulation $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 4$.

(b) Wir wenden die Definition der Rotation an und erhalten

$$\operatorname{rot} g(x) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \sin(x_2 - x_1) - \cos(x_2 + x_1).$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \iint_D \operatorname{rot} g(x)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 &= \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \sin(x_2 - x_1) - \cos(x_2 + x_1)\, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_0^\pi \left(2\cos(x_1) + 2\sin(x_1)\right)\, \mathrm{d}x_1 = 2\left[\sin(x_1)\right]_0^\pi - 2\left[\cos(x_1)\right]_0^\pi \\ &= 0 + 4 = 4. \end{aligned}$$

(c) Wir haben

$$4 \overset{\text{(a)}}{=} \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x \overset{\text{Green}}{=} \iint_D \operatorname{rot} g(x)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \overset{\text{(b)}}{=} 4.$$

Die Ergebnisse in (a) und (b) stimmen überein, wie der Satz von Green es vorhersagt.