Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 2

Hausaufgabe 4 Sei $J := \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_2 \geqslant 0 \}$.
Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet. Sei K positiv orientiert parametrisiert.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x_1, x_2) := \left(\begin{smallmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, K)$.

(b) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{div} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

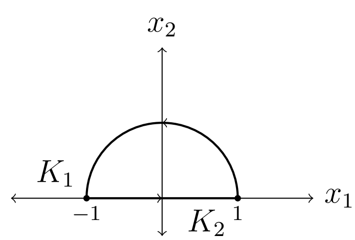
(c) Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und aus (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Lösung.

(a) Wir zerlegen die Kurve K in zwei Teilkurven $K = K_1 \cup K_2$.

Die Teilkurven K_1 und K_2 parametrisieren wir wie folgt:

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} C_{1,1}(t) \\ C_{1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\,,\ t \in [0, \pi]\,, \quad C_2(t) = \begin{pmatrix} C_{2,1}(t) \\ C_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\,,\ t \in [-1, 1]\,.$$



Der Ausfluss wird wie folgt berechnet.

$$A(g, K) = \underbrace{\int_{K_1} g\big(C_1(t)\big) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,2}(t) \\ -C'_{1,1}(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t}_{=:A_1} + \underbrace{\int_{K_2} g\big(C_2(t)\big) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,2}(t) \\ -C'_{2,1}(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t}_{=:A_2}\,.$$

Für das erste Integral A_1 ist

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{K_1} g\big(C_1(t)\big) \bullet \begin{pmatrix} C'_{1,2}(t) \\ -C'_{1,1}(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^\pi g \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &\overset{(*)}{=} \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t)\cos^2(t) + \sin(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \sin(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

wobei wir bei $(*)$ die Identität $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ verwenden.

Wir führen nun eine Substitution mit $u := \cos(t)$, $\mathrm{d}u = -\sin(t)\mathrm{d}t$ durch und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t &= -\int_{u(0)}^{u(\pi)} u^2\mathrm{d}u + \int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t = -\left[\frac{1}{3}u^3\right]_1^{-1} + [-\cos(t)]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{3}\big((-1)^3 - 1^3\big) - \big(\cos(\pi) - \cos(0)\big) \\ &= \frac{2}{3} + 2\,.\end{aligned}$$

Für das zweite Integral A_2 ist

$$\begin{aligned}A_2 &= \int_{K_2} g\big(C_2(t)\big) \bullet \begin{pmatrix} C'_{2,2}(t) \\ -C'_{2,1}(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_{-1}^1 g\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^1 t^2\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^1 = -\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für den Ausfluss $A(g,K) = A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 2\,.$

(b) Die Divergenz von g ist

$$\operatorname{div}(g) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = x_2 + 2x_2 = 3x_2.$$

Wir fassen J als Normalbereich bezüglich der x_1-Achse auf. Dann folgt aus $0 \leqslant x_2$ und

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; x_2^2 \leqslant 1 - x_1^2$$

das Integrationsintervall

$$0 \leqslant x_2 \leqslant \sqrt{1 - x_1^2}\,.$$

Ferner gilt $-1 \leqslant x_1 \leqslant 1$.

Dann ist

$$\begin{aligned}\int\int_J \operatorname{div}(g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} 3x_2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{3x_2^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x_1^2}} \mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{3}{2}\int_{-1}^1 (1 - x_1^2)\mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{3}{2}\left[x_1 - \frac{x_1^3}{3}\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{3}{2}\left(2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)\right) = 2.\end{aligned}$$

(c) Wir haben

$$2 \overset{\text{(a)}}{=} A(g,K) \overset{\text{Gauß}}{=} \int\int_J \operatorname{div}(g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \overset{\text{(b)}}{=} 2\,.$$

Die Ergebnisse aus (a) und (b) stimmen überein, wie der Satz von Gauß (1.5.7) es vorhersagt.

Hausaufgabe 5 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \leqslant 0 \}$.

(a) Finden Sie eine Parametrisierung $\psi : B \to D$ für einen geeigneten Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ unter Verwendung von Polarkoordinaten r und φ.

(b) Skizzieren Sie B im r-φ-Koordinatensystem. Skizzieren Sie D im x-y-Koordinatensystem. Skizzieren Sie die Teilmenge $\tilde{B} := \{ \binom{r}{\varphi} \in B \,|\, r \geqslant \frac{1}{2} \} \subseteq B$. Skizzieren Sie $\psi(\tilde{B}) \subseteq D$.

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_D \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

mittels einer Substitution unter Verwendung von (a).

Lösung.

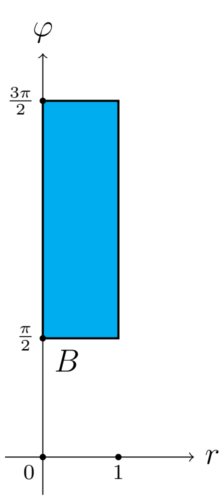
(a) Wir wählen einen Bereich B, der mit den Polarkoordinaten wie folgt beschrieben wird.

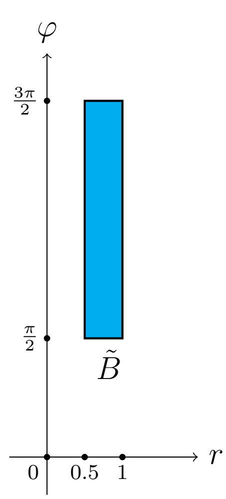
$$B := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant 1; \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2} \right\}$$

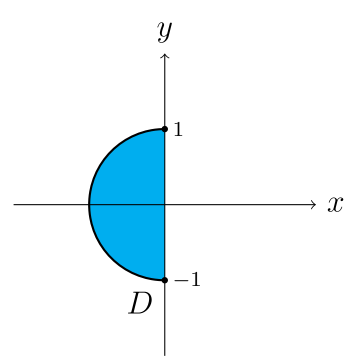
Dann ist eine Parametrisierung $\psi : B \to D$ ist gegeben durch

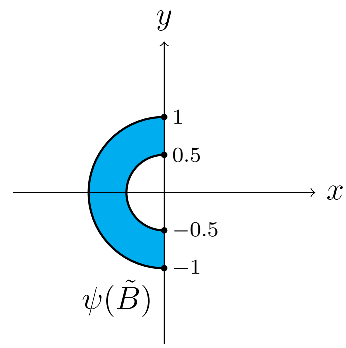
$$\psi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

(b) Die Skizzen von B, $\tilde{B}$, D und $\psi(\tilde{B})$ sind unten dargestellt.









(c) Mit der Substitution aus (a) lässt sich das Integral wie folgt berechnen.

$$
\begin{aligned}
\int\int_D \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^1 \frac{4r}{1+r^2} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\cdot\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&\overset{(**)}{=} 4\cdot\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+r^2}\right)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\cdot\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[r-\arctan(r)\right]_0^1\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\cdot\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(1-\underbrace{\arctan(1)}_{=\pi/4}-0+\underbrace{\arctan(0)}_{=0}\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\cdot\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[\varphi\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \\
&= (4-\pi)\cdot\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= (4-\pi)\pi.
\end{aligned}
$$

Bei $(**)$ wird

$$\frac{r^2}{1+r^2} = \frac{1+r^2-1}{1+r^2} = \frac{1+r^2}{1+r^2} - \frac{1}{1+r^2} = 1-\frac{1}{1+r^2}$$

verwendet.

Hausaufgabe 6

Sei $S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ und } z \geqslant 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Skizzieren Sie S.

(b) Sei $K := \{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 \leqslant 4 \}$.

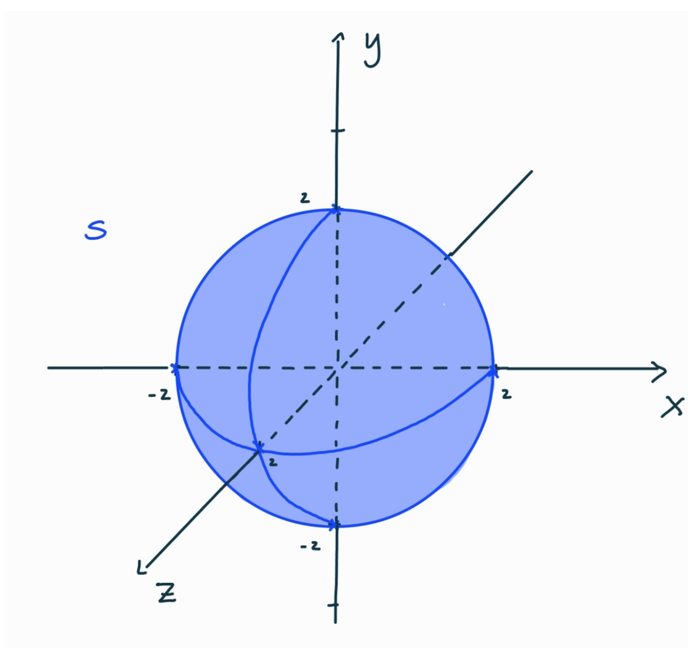
Finden Sie eine Parametrisierung $\Phi : K \to S : \binom{u}{v} \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \\ \Phi_3(u,v) \end{pmatrix}$.

(c) Berechnen Sie Φ_u, Φ_v und $n := \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|}$ für $\binom{u}{v} \in K$.

Fügen Sie diese drei Vektoren für $\binom{u}{v} = \binom{0}{1}$ an der Stelle $\Phi(0,1)$ zur Skizze in (a) hinzu.

Lösung.

(a) Skizze von S:



(b) Eine Parametrisierung von S ist gegeben durch

$$\Phi : K \to S \,, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \\ \Phi_3(u,v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{4 - u^2 - v^2} \end{pmatrix} .$$

(c) Wir berechnen

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} (\Phi_1)_u \\ (\Phi_2)_u \\ (\Phi_3)_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{u}{\sqrt{4-u^2-v^2}} \end{pmatrix}; \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} (\Phi_1)_v \\ (\Phi_2)_v \\ (\Phi_3)_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{v}{\sqrt{4-u^2-v^2}} \end{pmatrix};$$

und

$$n = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{4-u^2-v^2} \end{pmatrix}.$$

Mit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird dann

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \quad \text{und } n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Skizze von S mit den Vektoren Φ_u, Φ_v und n: