Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 3

Hausaufgabe 7 Sei

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = xy,\ x^2 + y^2 \leqslant 2 \right\}$$

der Schnitt des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$ mit dem Zylinder $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

(a) Geben Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Phi : J \to \mathbb{R}^3$ an mit $\Phi(J) = S$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{F}(S)$.

Verwenden Sie hierbei Polarkoordinaten bei der Auswertung des Integrals.

Lösung.

(a) Der Zylinder lässt sich einfach parametrisieren, wenn man in der x-y-Ebene Polarkoordinaten mit $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ wobei $r \in [0, \sqrt{2}]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ verwendet. In diesem Fall folgt $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r^2 \leqslant 2$. Mit $z = xy = r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$ ist durch $J = [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$ und

$$\Phi : J \to \mathbb{R}^3, \qquad (r, \varphi) \mapsto \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung mit $\Phi(J) = S$ gegeben.

(b) Der Flächeninhalt $\mathrm{F}(S)$ lässt sich mit

$$\mathrm{F}(S) = \iint_J |\Phi_r \times \Phi_\varphi| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

berechnen. Hierbei sind

$$\Phi_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2r\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Phi_\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r^2\cos^2(\varphi) - r^2\sin^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Phi_r \times \Phi_\varphi &= \begin{pmatrix} r^2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi) - r^2\sin^3(\varphi) - 2r^2\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) \\ -2r^2\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) - r^2\cos^3(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)\cos(\varphi) \\ r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -r^2\sin(\varphi)(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \\ -r^2\cos(\varphi)(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \\ r(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2\sin(\varphi) \\ -r^2\cos(\varphi) \\ r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit

$$|\Phi_r \times \Phi_\varphi| = \sqrt{r^4 \sin^2(\varphi) + r^4 \cos^2(\varphi) + r^2} = r\sqrt{r^2+1}$$

folgt schließlich für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
F(S) &= \iint_J |\Phi_r \times \Phi_\varphi| \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r &&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} r\sqrt{r^2+1}\, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \textstyle\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{r^2+1}\, \mathrm{d}r &&\overset{u = r^2+1}{=} \pi \int_1^3 \sqrt{u}\, \mathrm{d}u \\
&= \pi \left[\tfrac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^3 &&= \tfrac{2}{3}\pi(3\sqrt{3}-1) \;=\; 2\pi \left(\sqrt{3} - \tfrac{1}{3} \right).
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 8 Sei $S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_3 = 1 \right\}$.

Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

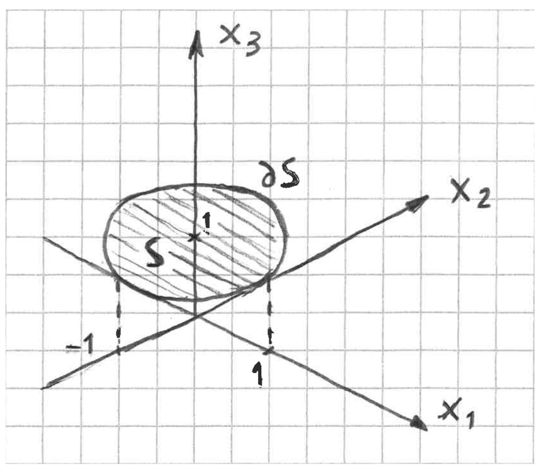
(b) Geben Sie eine Parametrisierung von S an als Graph einer konstanten Funktion.

(c) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, \partial S) = \int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(d) Berechnen Sie $\iint_S \operatorname{rot} g(x) \bullet\ n \ \mathrm{d}O$ als Gebietsintegral. Vergleichen Sie mit (c).

Lösung.

(a) Die Menge S beschreibt eine zur x_1-x_2-Ebene parallel angeordnete Kreisscheibe durch den Punkt $(0, 0, 1)$. Die Kreisscheibe und deren Rand ∂S sind in folgender Skizze veranschaulicht:



(b) Der Graph einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ ist die Menge

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in D,\ f(x_1, x_2) = x_3 \right\}$$

Wählen wir

$$D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \right\}$$

und $f : D \to \mathbb{R}$, $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto 1$ (diese Funktion ist konstant), dann entspricht der Graph von f offenbar der Kreisscheibe S.

Als Parametrisierung von S ergibt sich

$$\Phi \ :\ D \ \to\ \mathbb{R}^3 \ :\ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \ \mapsto\ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

Es ist dann $S = \Phi(D)$.

(c) Eine Parametrisierung der Randkurve ∂D von D in positiver Richtung ist gegeben durch

$$C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi \mapsto C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Als Parametrisierung von ∂S ergibt sich hieraus

$$(\Phi \circ C)(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Wir bemerken für folgende Rechnung: Aus $\cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 = 2\cos(\varphi)^2 - 1$ folgt $\cos(\varphi)^2 = \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{1}{2}$.

Setzen wir die Parametrisierung in das Kurvenintegral für $\mathrm{Z}(g, \partial S)$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}(g, \partial S) &= \int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} g\big((\Phi \circ C)(\varphi)\big) \bullet (\Phi \circ C)'(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin(\varphi)^2\cos(\varphi) + \cos(\varphi)^2\right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin(\varphi)^2\cos(\varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}\varphi \\
&= -\left[\frac{1}{3}\sin(\varphi)^3\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2\varphi) + \frac{1}{2}\cdot\varphi\right]_0^{2\pi} \\
&= 0 + \pi = \pi.
\end{aligned}$$

(d) Es ist

$$\operatorname{rot} g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ 0 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Das Integral $\iint_S \operatorname{rot} g(x) \bullet n \,\mathrm{d}O$ lässt sich dann unter Verwendung der Parametrisierung von S als Graph der Funktion f aus Teil (b) berechnen. Wie in Beispiel 2.1.7 auf den Vorlesungsfolien gilt für den Normalenvektor dann

$$n = \begin{pmatrix} -f_{x_1}(x_1, x_2) \\ -f_{x_2}(x_1, x_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

letzteres, da f ja konstant ist. Damit folgt

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} g(x) \bullet n \; \mathrm{d}O &= \iint_S (x_3 - x_1) \; \mathrm{d}O \\ &= \iint_D (1 - x_1) \; \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\ &= \iint_D 1 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 - \iint_D x_1 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\ &= \mathrm{F}(D) - \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{+\sqrt{1-x_2^2}} x_1 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\ &= \mathrm{F}(D) - \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{2} x_1^2\right]_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{+\sqrt{1-x_2^2}} \mathrm{d}x_2 \\ &= \pi - 0 = \pi.\end{aligned}$$

(Man kann auch vorbringen: Das Integral $\iint_D x_1 \; \mathrm{d}O$ ist null, weil der Schwerpunkt von D im Ursprung liegt.)

Nach dem Satz von Stokes ist

$$\iint_S \operatorname{rot} g(x) \bullet n \; \mathrm{d}O = \int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x.$$

Dank der Berechnungen in (c) und (d) bestätigt sich dies im vorliegenden Fall: Beide Seiten sind gleich π.

Hausaufgabe 9 Wir betrachten die Halbkugel $B := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0 \right\}$.

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_{-2}^{2} (4-x^2)^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}x$ unter Verwendung der Substitution $x = 2\sin(t)$.

(b) Schreiben Sie den Kreis $D := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 4 \right\}$ als Normalbereich bezüglich der x-Achse.

(c) Schreiben Sie mittels (b) die Halbkugel B als Normalbereich bezüglich der x-y-Ebene.

(d) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\iiint_B z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ unter Verwendung von (c) und (a).

Lösung.

(a) Wir substituieren $x = 2\sin(t)$. Mit $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ liegt $x = 2\sin(t)$ gerade wieder im Intervall $[-2, 2]$ und es ist

$$\mathrm{d}x = 2\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} (4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 4\sin(t)^2)^{\frac{3}{2}}\, 2\cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16(1-\sin(t)^2)^{\frac{3}{2}}\ \cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16(\cos(t)^2)^{\frac{3}{2}}\ \cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16\ \cos(t)^4\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned}
\cos(t)^4 &= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} + 6\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot 2\cos(2t) + \frac{1}{16}\cdot 2\cos(4t) + \frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Für das Integral erhalten wir dann

$$8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\,\mathrm{d}t + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(4t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6\,\mathrm{d}t = 4\left[\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left[\sin(4t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 6\pi = 6\pi.$$

(b) Um den Bereich D in einen Normalbereich umzuschreiben, wir schreiben das Intervall von y als Funktion von x

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ &y^2 \leqslant 4 - x^2 \\ &\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}. \end{aligned}$$

Wegen $x^2 + y^2 \leqslant 4$ ist $x \in [-2, 2]$. Wir erhalten

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2} \right\}.$$

(c) Auch hier schreiben wir das Intervall von z als Funktion von x und y

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 && z \geqslant 0 \\ &z^2 \leqslant 4 - x^2 - y^2 && z \geqslant 0 \\ &0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} B : &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4-x^2-y^2} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2},\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4-x^2-y^2} \right\}. \end{aligned}$$

(d) Die Integrationsgrenzen können wir aus den Normalbereichen ablesen:

$$\begin{aligned} \iiint_B z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \left[\left(2 - \frac{x^2}{2} \right) y - \frac{y^3}{6} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{2} \left(2 \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) \sqrt{4-x^2} - \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \frac{2}{3} \left(4 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwenden wir das Integral aus Teilaufgabe (a):

$$\frac{2}{3} \int_{-2}^{2} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\, 6\pi = 4\pi.$$

Vgl. auch die Rechnung in 2.3.8, in der zur Lösung desselben Problems Kugelkoordinaten zum Einsatz kamen.