

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 3**Hausaufgabe 7** Sei

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy, x^2 + y^2 \leq 2 \right\}$$

der Schnitt des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$ mit dem Zylinder $x^2 + y^2 \leq 2$.

(a) Geben Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Phi : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ an mit $\Phi(J) = S$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $F(S)$.

Verwenden Sie hierbei Polarkoordinaten bei der Auswertung des Integrals.

Lösung.

(a) Der Zylinder lässt sich einfach parametrisieren, wenn man in der x - y -Ebene Polarkoordinaten mit $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$ wobei $r \in [0, \sqrt{2}]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ verwendet. In diesem Fall folgt $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r^2 \leq 2$. Mit $z = xy = r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)$ ist durch $J = [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$ und

$$\Phi : J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \varphi) \mapsto \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung mit $\Phi(J) = S$ gegeben.

(b) Der Flächeninhalt $F(S)$ lässt sich mit

$$F(S) = \iint_J |\Phi_r \times \Phi_\varphi| d\varphi dr$$

berechnen. Hierbei sind

$$\Phi_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2r \cos(\varphi) \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ r^2 \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Phi_r \times \Phi_\varphi &= \begin{pmatrix} r^2 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^3(\varphi) - 2r^2 \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) \\ -2r^2 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) - r^2 \cos^3(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) \cos(\varphi) \\ r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -r^2 \sin(\varphi)(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \\ -r^2 \cos(\varphi)(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \\ r(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2 \sin(\varphi) \\ -r^2 \cos(\varphi) \\ r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit

$$|\Phi_r \times \Phi_\varphi| = \sqrt{r^4 \sin^2(\varphi) + r^4 \cos^2(\varphi) + r^2} = r\sqrt{r^2 + 1}$$

folgt schließlich für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F(S) &= \iint_J |\Phi_r \times \Phi_\varphi| d\varphi dr &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} r\sqrt{r^2 + 1} d\varphi \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{r^2 + 1} dr &\stackrel{u=r^2+1}{=} \pi \int_1^3 \sqrt{u} du \\ &= \pi \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^3 &= \frac{2}{3}\pi(3\sqrt{3} - 1) = 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

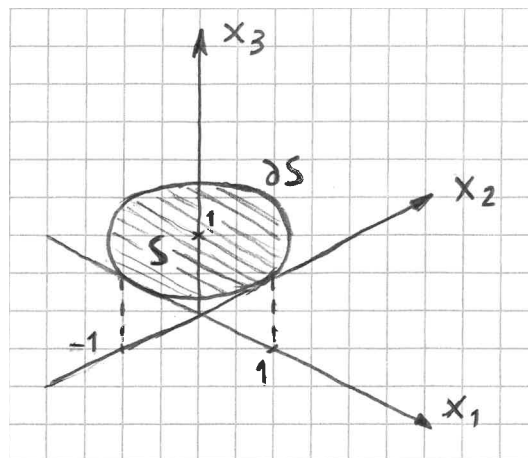
Hausaufgabe 8 Sei $S := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 1 \right\}$.

$$\text{Sei } g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- Skizzieren Sie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.
- Geben Sie eine Parametrisierung von S an als Graph einer konstanten Funktion.
- Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g, \partial S) = \int_{\partial S} g(x) \cdot dx$ als Kurvenintegral.
- Berechnen Sie $\iint_S \text{rot } g(x) \cdot n \, dO$ als Gebietsintegral. Vergleichen Sie mit (c).

Lösung.

- Die Menge S beschreibt eine zur x_1 - x_2 -Ebene parallel angeordnete Kreisscheibe durch den Punkt $(0, 0, 1)$. Die Kreisscheibe und deren Rand ∂S sind in folgender Skizze veranschaulicht:



- Der Graph einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ ist die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D, f(x_1, x_2) = x_3 \right\}$$

Wählen wir

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$$

und $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 1$ (diese Funktion ist konstant), dann entspricht der Graph von f offenbar der Kreisscheibe S .

Als Parametrisierung von S ergibt sich

$$\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist dann $S = \Phi(D)$.

(c) Eine Parametrisierung der Randkurve ∂D von D in positiver Richtung ist gegeben durch

$$C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Als Parametrisierung von ∂S ergibt sich hieraus

$$(\Phi \circ C)(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Wir bemerken für folgende Rechnung: Aus $\cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 = 2\cos(\varphi)^2 - 1$ folgt $\cos(\varphi)^2 = \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{1}{2}$.

Setzen wir die Parametrisierung in das Kurvenintegral für $Z(g, \partial S)$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} Z(g, \partial S) &= \int_{\partial S} g(x) \cdot dx \\ &= \int_0^{2\pi} g((\Phi \circ C)(\varphi)) \cdot (\Phi \circ C)'(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) + \cos(\varphi)^2) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) + \frac{1}{2} \right) d\varphi \\ &= -\left[\frac{1}{3} \sin(\varphi)^3 \right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2\varphi) + \frac{1}{2} \cdot \varphi \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 + \pi = \pi. \end{aligned}$$

(d) Es ist

$$\operatorname{rot} g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ 0 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Das Integral $\iint_S \operatorname{rot} g(x) \cdot n \, dO$ lässt sich dann unter Verwendung der Parametrisierung von S als Graph der Funktion f aus Teil (b) berechnen. Wie in Beispiel 2.1.7 auf den Vorlesungsfolien gilt für den Normalenvektor dann

$$n = \begin{pmatrix} -f_{x_1}(x_1, x_2) \\ -f_{x_2}(x_1, x_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

letzteres, da f ja konstant ist. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \iint_S \operatorname{rot} g(x) \cdot n \, dO &= \iint_S (x_3 - x_1) \, dO \\
 &= \iint_D (1 - x_1) \, dx_1 \, dx_2 \\
 &= \iint_D 1 \, dx_1 \, dx_2 - \iint_D x_1 \, dx_1 \, dx_2 \\
 &= F(D) - \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{+\sqrt{1-x_2^2}} x_1 \, dx_1 \, dx_2 \\
 &= F(D) - \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{2} x_1^2 \right]_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{+\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 \, dx_2 \\
 &= \pi - 0 = \pi.
 \end{aligned}$$

(Man kann auch vorbringen: Das Integral $\iint_D x_1 \, dO$ ist null, weil der Schwerpunkt von D im Ursprung liegt.)

Nach dem Satz von Stokes ist

$$\iint_S \operatorname{rot} g(x) \cdot n \, dO = \int_{\partial S} g(x) \cdot dx.$$

Dank der Berechnungen in (c) und (d) bestätigt sich dies im vorliegenden Fall: Beide Seiten sind gleich π .

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Hausaufgabe 9 Wir betrachten die Halbkugel $B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0 \right\}$.

- (a) Berechnen Sie das Integral $\int_{-2}^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$ unter Verwendung der Substitution $x = 2 \sin(t)$.
- (b) Schreiben Sie den Kreis $D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$ als Normalbereich bezüglich der x -Achse.
- (c) Schreiben Sie mittels (b) die Halbkugel B als Normalbereich bezüglich der x - y -Ebene.
- (d) Berechnen Sie das Integral $\iiint_B z dx dy dz$ unter Verwendung von (c) und (a).

Lösung.

- (a) Wir substituieren $x = 2 \sin(t)$. Mit $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ liegt $x = 2 \sin(t)$ gerade wieder im Intervall $[-2, 2]$ und es ist

$$dx = 2 \cos(t) dt.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4-4\sin(t)^2)^{\frac{3}{2}} 2 \cos(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16(1-\sin(t)^2)^{\frac{3}{2}} \cos(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16(\cos(t)^2)^{\frac{3}{2}} \cos(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16 \cos(t)^4 dt. \end{aligned}$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned} \cos(t)^4 &= \frac{1}{16} (e^{-it} + e^{it})^4 \\ &= \frac{1}{16} (4e^{-2it} + 4e^{2it} + e^{-4it} + e^{4it} + 6) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \cos(2t) + \frac{1}{16} \cdot 2 \cos(4t) + \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{8} \cos(4t) + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Für das Integral erhalten wir dann

$$8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(4t) dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6 dt = 4 [\sin(2t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} [\sin(4t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 6\pi = 6\pi.$$

- (b) Um den Bereich D in einen Normalbereich umzuschreiben, wir schreiben das Intervall von y als Funktion von x

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\leq 4 \\y^2 &\leq 4 - x^2 \\ \sqrt{4 - x^2} &\leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.\end{aligned}$$

Wegen $x^2 + y^2 \leq 4$ ist $x \in [-2, 2]$. Wir erhalten

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\}.$$

- (c) Auch hier schreiben wir das Intervall von z als Funktion von x und y

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &\leq 4 & z &\geq 0 \\z^2 &\leq 4 - x^2 - y^2 & z &\geq 0 \\ 0 &\leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}B &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}.\end{aligned}$$

- (d) Die Integrationsgrenzen können wir aus den Normalbereichen ablesen:

$$\begin{aligned}\iiint_B z \, dz \, dy \, dx &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy \, dx = \int_{-2}^2 \left[\left(2 - \frac{x^2}{2} \right) y - \frac{y^3}{6} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(2 \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) \sqrt{4-x^2} - \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) dx = \int_{-2}^2 \frac{2}{3} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwenden wir das Integral aus Teilaufgabe (a):

$$\frac{2}{3} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} 6\pi = 4\pi.$$

Vgl. auch die Rechnung in 2.3.8, in der zur Lösung desselben Problems Kugelkoordinaten zum Einsatz kamen.