Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

# Lösung 4

**Hausaufgabe 10** Sei $D := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 4 \right\}$.

Sei $\Psi(u,v,w) := \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \\ w^2 \end{pmatrix}$, definiert auf $P := \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$.

Sei $f(x,y,z) = xyz$, definiert auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ohne Verwendung einer Transformation.

(b) Bestimmen Sie $B \subseteq P$ mit $\Psi(B) = D$.

(c) Bestimmen Sie $|\det \mathrm{J}\Psi(u,v,w)|$.

(d) Bestimmen Sie $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ unter Verwendung der Transformation mittels $\Psi$. Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und (d).

*Lösung.*

(a) Das Integral ohne Transformation wird wie folgt berechnet.

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^4 \int_0^4 \int_0^4 xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^4 \int_0^4 yz \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=4} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 8 \cdot \int_0^4 \int_0^4 yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 8 \cdot \int_0^4 z \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=4} \mathrm{d}z = 8^2 \cdot \int_0^4 z\,\mathrm{d}z \\ &= 8^2 \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4} = 8^3 = 512\,.\end{aligned}$$

(b) Für $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant u \leqslant 2,\ 0 \leqslant v \leqslant 2,\ 0 \leqslant w \leqslant 2 \right\}$ erhalten wir $\Psi(B) = D$.

(c) Die Transformation $\Psi(u,v,w)$ ist gegeben durch

$$\Psi(u,v,w) = \begin{pmatrix} \Psi_1(u,v,w) \\ \Psi_2(u,v,w) \\ \Psi_3(u,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \\ w^2 \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix von $\Psi(u,v,w)$ ist

$$\mathrm{J}\Psi(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{bmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante von $\Psi(u,v,w)$ ist

$$|\det \mathrm{J}\Psi(u,v,w)| = |8uvw|.$$

(d) Mit Hilfe der Transformationsformel ist

$$\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_B (f\circ\Psi)(u,v,w)\cdot|\det \mathrm{J}\Psi(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= \int_0^2\int_0^2\int_0^2 (u^2v^2w^2)\cdot|8uvw|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= 8\cdot\int_0^2\int_0^2\int_0^2 u^3v^3w^3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= 8\cdot\int_0^2\int_0^2 v^3w^3\left[\frac{u^4}{4}\right]_{u=0}^{u=2}\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = 8\cdot 4\cdot\int_0^2\int_0^2 v^3w^3\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= 8\cdot 4\cdot\int_0^2 w^3\left[\frac{v^4}{4}\right]_{v=0}^{v=2}\mathrm{d}w = 8\cdot 4^2\cdot\int_0^2 w^3\,\mathrm{d}w \\
&= 8\cdot 4^2\cdot\left[\frac{w^4}{4}\right]_{w=0}^{w=2} = 8\cdot 4^3 = 512\,.
\end{aligned}$$

**Hausaufgabe 11** Sei $V := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0 \right\}$.
Sei $S$ die Oberfläche von $V$.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x,y,z) := \left(\begin{smallmatrix} xz^2 \\ y^2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, S)$.

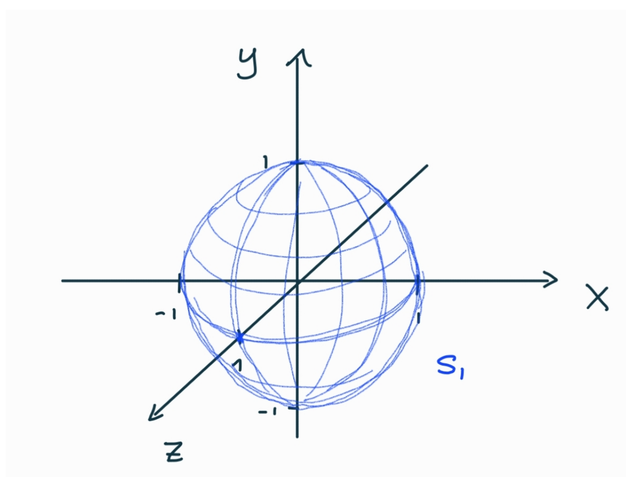
(b) Bestimmen Sie $\iiint_V \operatorname{div} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ als Gebietsintegral.
Vergleichen Sie mit dem Resultat aus (a) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

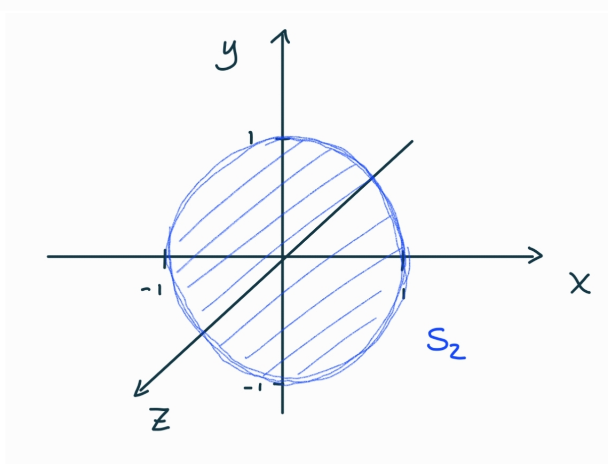
*Lösung.*

(a) Die Fläche $S$, die den Bereich $V$ umschließt, ist gegeben durch

$$S = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0 \right\} .$$

Wir zerlegen $S$ in zwei Teilflächen $S_1$ und $S_2$ wie in den Skizzen angedeutet.



Die Fläche $S_1$ ist die Oberfläche der vorderen Halbkugel und wird parametrisiert durch

$$\Phi_1(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix},$$

wobei $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$ und $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Es ist

$$\Phi_{1,\vartheta}(\vartheta,\varphi) \times \Phi_{1,\varphi}(\vartheta,\varphi) = \sin(\vartheta) \cdot \Phi_1(\vartheta,\varphi).$$

(Man vergleiche Beispiel 2.4.5. aus der Vorlesung.)

Dieser Vektor zeigt nach außen.

Der Ausfluss von $g$ durch $S_1$ ist also

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}(g, S_1) \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} g(\Phi_1(\vartheta,\varphi)) \bullet (\Phi_{1,\vartheta}(\vartheta,\varphi) \times \Phi_{1,\varphi}(\vartheta,\varphi)) \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)^2 \\ \sin(\varphi)^2\sin(\vartheta)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \sin(\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left(\sin(\vartheta)^3\cos(\vartheta)^2\cos(\varphi)^2 + \sin(\vartheta)^4\sin(\varphi)^3\right) \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(\vartheta)^3\cos(\vartheta)^2\cos(\varphi)^2 \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta + \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(\vartheta)^4\sin(\varphi)^3 \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta)^3\cos(\vartheta)^2 \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)^2\mathrm{d}\varphi\right)}_{=\pi\,,(*)} \mathrm{d}\vartheta + \int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta)^4 \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)^3\mathrm{d}\varphi\right)}_{=0\,,(**)} \mathrm{d}\vartheta \\
&= \pi \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta)^3\cos(\vartheta)^2\mathrm{d}\vartheta}_{=2/15\,,(***)} + \int_0^{\pi/2} 0\,\mathrm{d}\vartheta \\
&\quad = \pi \cdot \frac{2}{15} + 0 \\
&\quad = \frac{2\pi}{15}\,.
\end{aligned}$$

Zu $(*)$. Es ist $\cos(\varphi)^2 = (\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}))^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi})) = \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{1}{2}$ und also

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)^2\mathrm{d}\varphi \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi \;=\; \left[\frac{1}{4}\sin(2\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} \;=\; \pi\,.$$

Zu $(**)$. Mit der Substitution $u := \cos(\varphi)$ und $\mathrm{d}u = -\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi$ wird

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)^3\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(\varphi)^2 \cdot \sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos(\varphi)^2\right) \cdot \sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
= \int_{u(0)}^{u(2\pi)} -\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u &= \int_1^1 -\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u = 0\,.
\end{aligned}$$

Zu $(**)$. Mit der Substitution $u := \cos(\vartheta)$ und $\mathrm{d}u = -\sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$ wird

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta)^3 \cos(\vartheta)^2 \mathrm{d}\vartheta &= \int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta)^2 \cdot \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)^2 \mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos(\vartheta)^2\right) \cdot \cos(\vartheta)^2 \sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_{u(0)}^{u(\pi/2)} -\left(1 - u^2\right) \cdot u^2 \mathrm{d}u \\
&= \int_1^0 (u^4 - u^2)\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^0 = 0 - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2}{15}\,.
\end{aligned}$$

Die Fläche $S_2$ ist die hintere Kreisscheibe und wird parametrisiert durch

$$\Phi_2(\varphi, r) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $0 \leqslant r \leqslant 1$ und $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\Phi_{2,\varphi}(r,\varphi) \times \Phi_{2,r}(r,\varphi) &= \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r\left(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dieser Vektor zeigt nach außen.

Der Ausfluss von $g$ durch $S_2$ ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(g, S_2) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 g(\Phi_2(\vartheta,\varphi)) \bullet (\Phi_{2,\varphi}(r,\varphi) \times \Phi_{2,r}(r,\varphi))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ r^2\sin(\varphi)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 0\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Der Ausfluss durch die gesamte Fläche $S$ ist also gegeben durch

$$\mathrm{A}(g, S) = \mathrm{A}(g, S_1) + \mathrm{A}(g, S_2) = \frac{2\pi}{15} + 0 = \frac{2\pi}{15}\,.$$

(b) Die Divergenz von $g(x, y, z)$ ist

$$\operatorname{div} g(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = z^2 + 2y.$$

Wir berechnen das Volumenintegral mit Hilfe von Kugelkoordinaten. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \operatorname{div} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \big(r^2\cos(\vartheta)^2 + 2r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\big)\, r^2\sin(\vartheta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \big(r^4\cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta) + 2r^3\sin(\vartheta)^2\sin(\varphi)\big)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^4\cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}_{=:V_1} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 2r^3\sin(\vartheta)^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}_{=:V_2}\,.
\end{aligned}$$

Wir berechnen $V_1$:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^4\cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta)\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{5}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2\pi}{5}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $u := \cos(\vartheta)$ und $\mathrm{d}u = -\sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$ wird dann

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{5}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta &= \frac{2\pi}{5}\cdot\int_{u(0)}^{u(\pi/2)} -u^2\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2\pi}{5}\cdot\left[-\frac{u^3}{3}\right]_1^0 = \frac{2\pi}{15}\,.
\end{aligned}$$

Wir berechnen $V_2$. Die Variablen $r$, $\vartheta$ und $\varphi$ sind voneinander unabhängig, daher können wir die Integrationsreihenfolge beliebig vertauschen.

$$\begin{aligned}
V_2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 2r^3\sin(\vartheta)^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 2r^3\sin(\vartheta)^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1\int_0^{\pi/2} 2r^3\sin(\vartheta)^2\cdot[-\cos(\varphi)]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1\int_0^{\pi/2} 2r^3\sin(\vartheta)^2\cdot(-1+1)\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1\int_0^{\pi/2} 2r^3\cdot 0\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = 0\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$\iiint_V \operatorname{div} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = V_1 + V_2 = \frac{2\pi}{15} + 0 = \frac{2\pi}{15}\,.$$

Wir haben also

$$\mathrm{A}(g,S) \overset{\text{(a)}}{=} \frac{2\pi}{15} = \iiint_V \operatorname{div} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

wie auch vom Divergenzsatz von Gauß verlangt.

Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

**Hausaufgabe 12**

(a) Für welche reellen Werte von $a$ und $b$ ist $f(x) = x - x^{-1}$, definiert auf $\mathbb{R}^+$, eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \frac{ay}{x} - b \;=\; 0\,?$$

(b) Für welche reellen Werte von $r$ erfüllt $f(x) = \exp(rx)$, definiert auf $\mathbb{R}$, die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 6y \;=\; 0\,.$$

Geben Sie noch eine weitere Lösung dieser Differentialgleichung an.

*Lösung.*

(a) Die Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y' + \frac{ay}{x} - b = 0.$$

Die erste Ableitung von $f(x) = x - x^{-1}$ ist gegeben durch

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Setzt man $f(x)$ und $f'(x)$ in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned} y' + \frac{ay}{x} - b &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right) - b \\ &= 1 + a - b + \frac{1}{x^2}\,(1-a)\,. \end{aligned}$$

Nun erfüllt $f(x)$ die Differentialgleichung, wenn $a = 1$ und $b = 2$.

(b) Die Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Die erste Ableitung von $f(x) = \exp(rx)$ ist gegeben durch

$$f'(x) = r\exp(rx),$$

und die zweite Ableitung ist gegeben durch

$$f''(x) = r^2\exp(rx).$$

Setzt man $f(x), f'(x)$ und $f''(x)$ in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned} y'' + y' - 6y &= r^2\exp(rx) + r\exp(rx) - 6\exp(rx) \\ &= \exp(rx)\left(r^2 + r - 6\right) = \exp(rx)(r+3)(r-2). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird genau dann 0, falls $r = -3$ oder $r = 2$ ist.

Also erfüllen $f_1(x) := \exp(-3x)$ und $f_2(x) := \exp(2x)$ die Differentialgleichung.

Für beliebige $s$, $t \in \mathbb{R}$ ist nun

$$s \cdot \exp(-3x) + t \cdot \exp(2x)\,,$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung.

Man wählt zum Beispiel $s = t = 1$, dann ist $\exp(-3x) + \exp(2x)$ eine weitere Lösung der Differentialgleichung.

Man kann auch $s = t = 0$ wählen, dann wird die konstante Funktion 0 eine weitere Lösung der Differentialgleichung.