Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 5

Hausaufgabe 13 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(x^2+1)y' + y^2 \;=\; 0.$$

(a) Finden Sie eine konstante Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(x^2+1)y' + y^2 \;=\; 0 \quad \text{und} \quad y(\sqrt{3}) \;=\; \frac{1}{\pi}\,.$$

Lösung.

(a) Konstante Lösungen findet man mit dem Ansatz $y(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen (mit $y'(x) = 0$) liefert $c^2 = 0$ also $c = 0$. Damit ist $y(x) = 0$ eine konstante Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

(b) Mit Trennung der Variablen: Da $x^2 + 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist

$$(x^2+1)y' = y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Integration liefert

$$\frac{1}{y} = -\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c.$$

D.h. weitere Lösungen der DGL sind gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{\arctan(x) + c}\,.$$

Zusammen mit der konstanten Lösung $y(x) = 0$ aus Teilaufgabe (a) sind dies alle Lösungen der gegebenen DGL.

(c) Wir setzen die Anfangsbedingung $y(\sqrt{3}) = 1/\pi$ in die Lösungen aus Teilaufgabe (b) ein und erhalten

$$\frac{1}{\pi} \stackrel{!}{=} y(\sqrt{3}) = \frac{1}{\arctan(\sqrt{3}) + c} = \frac{1}{\pi/3 + c}.$$

Daraus folgt $c = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$. Die Lösung des AWP ist daher

$$y(x) = \frac{1}{\arctan(x) + 2\pi/3}.$$

Hausaufgabe 14 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' + x\tan(y) \;=\; 0\;,$$

wobei $y \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

(a) Finden Sie eine konstante Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + x\tan(y) \;=\; 0 \quad \text{und} \quad y(0) \;=\; \frac{\pi}{4}\;.$$

Lösung.

(a) Konstante Lösungen findet man mit dem Ansatz $y(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen (mit $y'(x) = 0$) liefert $x\tan(c) = 0$. Die einzige Lösung für c ist damit $c = 0$. Damit ist $y(x) = 0$ eine konstante Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

(b) Es ist

$$y' + x\,\tan(y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y'}{\tan(y)} = -x.$$

Integration liefert

$$-\frac{x^2}{2} + c = \int x\,\mathrm{d}x = \int \frac{y'}{\tan(y)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\cos(y)}{\sin(y)}\,\mathrm{d}y = \ln(|\sin(y)|).$$

Auflösen nach y liefert

$$\sin(y) = \pm \mathrm{e}^{-x^2/2+c}$$

und also die Lösungen

$$y(x) = \arcsin\big(\pm\,\mathrm{e}^{-x^2/2+c}\big) = \arcsin\big(\pm\,\mathrm{e}^{c}\cdot\mathrm{e}^{-x^2/2}\big).$$

Zusammen mit der konstanten Lösung $y(x) = 0$ aus Teilaufgabe (a) sind dies alle Lösungen der gegeben DGL.

(c) Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = \pi/4 > 0$ liefert

$$\frac{\pi}{4} \overset{!}{=} y(0) = \arcsin(\pm\mathrm{e}^c)$$

und also

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\pi/4) = +\mathrm{e}^c.$$

Damit ist

$$y(x) = \arcsin\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-x^2/2}\big)$$

die Lösung des AWP.

Hausaufgabe 15 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' \;=\; y\sin(x) + \sin(2x).$$

(a) Finden Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Finden Sie alle Lösungen von $y' = y\sin(x) + \sin(2x)$.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' \;=\; y\sin(x) + \sin(2x) \quad \text{und} \quad y(0) \;=\; 0\,.$$

Lösung.

(a) Die zugehörige homogene Gleichung ist

$$y' - y\sin(x) = 0,$$

diese ist eine lineare DGL erster Ordnung. Aus der Vorlesung kennt man die allgemeine Lösung

$$y(x) = k\mathrm{e}^{-G(x)}$$

einer solchen Gleichung. Hierbei ist

$$G(x) = \int (-\sin(x))\ \mathrm{d}x = \cos(x).$$

Damit sind die Lösungen der homogenen Gleichung gegeben durch

$$y(x) = k\cdot \mathrm{e}^{-\cos(x)}$$

mit $k \in \mathbb{R}$.

(b) Um eine Partikulärlösung zu finden, verwenden wir Variation der Konstanten, d.h. wir setzen den Ansatz

$$y(x) = k(x)\cdot \mathrm{e}^{-\cos(x)}$$

in die DGL ein und erhalten mit

$$y'(x) = k'(x)\mathrm{e}^{-\cos(x)} + k(x)\sin(x)\mathrm{e}^{-\cos(x)}$$

die Bedingung

$$k'(x)\mathrm{e}^{-\cos(x)} + k(x)\sin(x)\mathrm{e}^{-\cos(x)} \overset{!}{=} \sin(x)y(x) + \sin(2x) = k(x)\sin(x)\mathrm{e}^{-\cos(x)} + \sin(2x).$$

Daraus folgt

$$k'(x)\mathrm{e}^{-\cos(x)} = \sin(2x),$$

also

$$k'(x) = \sin(2x)\mathrm{e}^{\cos(x)}$$

und damit

$$k(x) = \int \sin(2x)\mathrm{e}^{\cos(x)}\ \mathrm{d}x = 2\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}\ \mathrm{d}x = -2\int t\mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t.$$

Im letzten Schritt haben wir die Substitution $t = \cos(x)$ verwendet. Das letzte Integral wird mit partieller Integration berechnen. Wir erhalten

$$\int t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t.$$

Zusammengefasst ist

$$k(x) = 2(1-\cos(x))\mathrm{e}^{\cos(x)}$$

Damit ist durch

$$f_\mathrm{p}(x) = 2(1-\cos(x))\mathrm{e}^{\cos(x)}\mathrm{e}^{-\cos(x)} = 2(1-\cos(x))$$

eine Partikulärlösung des inhomogenen Problems gegeben. Alle weiteren Lösungen erhalten wir durch Addition der Lösungen des homogenen Problems aus Teilaufgabe (a):

$$f(x) = 2(1-\cos(x)) + d\mathrm{e}^{-\cos(x)}$$

mit $d \in \mathbb{R}$.

(c) Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ liefert

$$0 \overset{!}{=} y(0) = d \cdot \mathrm{e}^{-1},$$

und also $k = 0$. Die Lösung des AWP ist daher

$$f(x) = 2(1-\cos(x)).$$