Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 6

Hausaufgabe 16 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$x^2y^{(3)} - 3xy^{(2)} + 3y^{(1)} = 0 \quad \text{für} \quad x > 0$$

(a) Prüfen Sie, dass $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2$ und $f_3(x) = x^4$ Lösungen auf $\mathbb{R}^+$ sind.

(b) Berechnen Sie die Wronski-Matrix W(1) für die Lösungen aus (a).

(c) Ist f_1, f_2, f_3 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?
Bestimmen Sie den Lösungsraum.

(d) Welches Anfangswertproblem wird von $f_3(x)$ gelöst?

Lösung.

(a) Um zu prüfen, ob $f_1, f_2,$ und f_3 die Lösungen der Differentialgleichungen sind, benötigen wir Ableitungen bis zur 3. Ordnung. Die Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = 1, & f_1^{(1)}(x) = 0, & f_1^{(2)}(x) = 0, & f_1^{(3)}(x) = 0, \\ f_2(x) = x^2, & f_2^{(1)}(x) = 2x, & f_2^{(2)}(x) = 2, & f_2^{(3)}(x) = 0, \\ f_3(x) = x^4, & f_3^{(1)}(x) = 4x^3, & f_3^{(2)}(x) = 12x^2, & f_3^{(3)}(x) = 24x. \end{array}$$

Setzt man diese Werte in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$x^2 f_1^{(3)}(x) - 3xf_1^{(2)}(x) + 3f_1^{(1)}(x) = x^2 \cdot 0 - 3x \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0,$$

$$x^2 f_2^{(3)}(x) - 3xf_2^{(2)}(x) + 3f_2^{(1)}(x) = x^2 \cdot 0 - 3x \cdot 2 + 3 \cdot 2x = 0 - 6x + 6x = 0,$$

$$x^2 f_3^{(3)}(x) - 3xf_3^{(2)}(x) + 3f_3^{(1)}(x) = x^2 \cdot 24x - 3x \cdot 12x^2 + 3 \cdot 4x^3 = 24x^3 - 36x^3 + 12x^3 = 0.$$

Folglich erfüllen $f_1, f_2,$ und f_3 die Differentialgleichung.

(b) Die Wronski-Matrix ist gegeben durch

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1^{(1)}(x) & f_2^{(1)}(x) & f_3^{(1)}(x) \\ f_1^{(2)}(x) & f_2^{(2)}(x) & f_3^{(2)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^2 & x^4 \\ 0 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{pmatrix}.$$

Bei $x = 1$ haben wir

$$\mathrm{W}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

(c) Um zu prüfen, ob f_1, f_2 und f_3 ein Fundamentalsystem bilden, müssen wir $\det(\mathrm{W}(1))$ auswerten.

Wir nutzen aus, dass $\mathrm{W}(1)$ eine obere Blockdreiecksmatrix ist. Dann ist

$$\det(\mathrm{W}(1)) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} = \det(1) \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 12 - 2 \cdot 4) = 16.$$

Da $\det(\mathrm{W}(1)) \neq 0$ ist, bilden f_1, f_2 und f_3 ein Fundamentalsystem.

Der Lösungsraum ist gegeben durch

$$L = \{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) : c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}\}\,.$$

(d) Wählt man zum Beispiel $x_0 = 1$, dann ist

$$f_3(1) = 1\,, \quad f_3'(1) = 4\,, \quad f_3''(1) = 12\,.$$

Also löst $f_3(x)$ das Anfangswertproblem

$$y(1) = 1\,, \quad y'(1) = 4\,, \quad y''(1) = 12\,.$$

Alternativ: Wählt man zum Beispiel $x_0 = 2$, dann ist

$$f_3(2) = 16\,, \quad f_3'(2) = 32\,, \quad f_3''(2) = 48\,.$$

Also löst $f_3(x)$ auch das Anfangswertproblem

$$y(2) = 16\,, \quad y'(2) = 32\,, \quad y''(2) = 48\,.$$

Hausaufgabe 17 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y'''' - 5y'' + 4y \;=\; 0$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(X)$.
Bestimmen Sie die Lösungen von der Form $\mathrm{e}^{\lambda x}$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(0)$ für die Lösungen aus (a).
Handelt es sich um eine Vandermonde-Matrix? Bestimmen Sie $\det(\mathrm{W}(0))$.

(c) Prüfen Sie, ob die in (a) gefundenen Lösungen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Welche Dimension hat der Lösungsraum?

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom $p(X)$ für die Differentialgleichung ist gegeben durch

$$p(X) = X^4 - 5X^2 + 4 = (X^2 - 1)(X^2 - 4).$$

Also sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ und $\lambda_4 = -2$ die Nullstellen von $p(X)$.

Die Lösungen sind demnach

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{x}, \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad f_3(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad f_4(x) = \mathrm{e}^{-2x}.$$

(b) Die Wronski-Matrix ist gegeben durch

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) & f_4'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) & f_4''(x) \\ f_1'''(x) & f_2'''(x) & f_3'''(x) & f_4'''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{-2x} \\ \mathrm{e}^{x} & -\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{2x} & -2\mathrm{e}^{-2x} \\ \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{-x} & 4\mathrm{e}^{2x} & 4\mathrm{e}^{-2x} \\ \mathrm{e}^{x} & -\mathrm{e}^{-x} & 8\mathrm{e}^{2x} & -8\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Bei $x = 0$ haben wir

$$\mathrm{W}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathrm{W}(0)$ ist eine Vandermonde-Matrix für das 4-Tupel $(\lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3\,, \lambda_4) = (1, -1, 2, -2)$.
Die Determinante ist demnach gegeben durch

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{W}(0)) &= \Pi_{1 \leqslant j < k \leqslant 4}\,(\lambda_k - \lambda_j) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3) \\ &= (-1 - 1)(2 - 1)(-2 - 1)(2 - (-1))(-2 - (-1))(-2 - 2) \\ &= -2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-4) \\ &= 72. \end{aligned}$$

(c) Die Dimension von L ist 4, da die Differentialgleichung Ordnung 4 hat.

Aus (b) geht hervor, dass $\det(\mathrm{W}(0)) \neq 0$ ist. Folglich bilden f_1, f_2, f_3 und f_4 ein Fundamentalsystem. Der Lösungsraum ist gegeben durch

$$L = \{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_4 f_4(x) : c_1,\ c_2\,, c_3\,, c_4 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Hausaufgabe 18

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 2y \;=\; 0$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ an. Berechnen Sie $p(-1)$. Bestimmen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem.
Bestimmen Sie für dieses die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(0)$ und deren Inverse.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ und $y''(0) = 1$ unter Verwendung von (b).

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom $p(X)$ ist gegeben durch

$$p(X) = X^3 + 3X^2 + 4X + 2.$$

Bei $X = -1$ haben wir

$$p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = 0.$$

Wir stellen also fest, dass $\lambda_1 = -1$ eine Nullstelle $p(X)$ ist. Polynomdivision durch $(X+1)$ gibt

$$p(X) \;=\; X^3 + 3X^2 + 4X + 2 \;=\; (X+1)(X^2 + 2X + 2).$$

Für die anderen Nullstellen von $p(X)$ müssen wir die Nullstellen von $X^2 + 2X + 2$ finden. Mit Hilfe der Formel für die Nullstellen eines quadratischen Polynoms erhalten wir

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}\,.$$

Also sind $\lambda_2 = -1 - \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -1 + \mathrm{i}$ die weiteren Nullstellen.

Die Nullstellen von $p(X)$ sind also gegeben durch $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 - \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -1 + \mathrm{i}$.

Es ist $p(X) = (X - (-1))(X - (-1 - \mathrm{i}))(X - (-1 + \mathrm{i}))$.

(b) Wir behaupten das folgende Fundamentalsystem.

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x), \quad f_3(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x).$$

Hierbei stammt die Lösung f_1 von λ_1, während f_2 und f_3 von λ_2 und λ_3 stammen.

Wir bestimmen zunächst die Wronski-Matrix für f_1, f_2 und f_3:

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x}\cos(x) & \mathrm{e}^{-x}\sin(x) \\ -\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x}(\sin(x)+\cos(x)) & \mathrm{e}^{-x}(\cos(x)-\sin(x)) \\ \mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{-x}\sin(x) & -2\mathrm{e}^{-x}\cos(x) \end{pmatrix}.$$

Bei $x = 0$ haben wir

$$\mathrm{W}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\det(\mathrm{W}(0)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{Z}_2 \to \mathrm{Z}_2 + \mathrm{Z}_1}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -1 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1\,.$$

Also ist $\det(\mathrm{W}(0)) = 1 \neq 0$. Somit bilden f_1, f_2 und f_3 in der Tat ein Fundamentalsystem. Für die Berechnung des Inversen von $\mathrm{W}(0)$ verwenden wir das Gauß-Verfahren.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_1,\, Z_3 \to Z_3 - Z_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[Z_2 \leftrightarrow Z_3,\, Z_2 \to -Z_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - Z_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[Z_1 \to Z_1 + 2Z_3,\, Z_2 \to Z_2 - 2Z_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Das Inverse ist also

$$\mathrm{W}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir können den Lösungsraum schreiben als

$$L = \{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) : c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Um das Anfangswertproblem $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, und $y''(0) = 1$ zu lösen, müssen wir c_1, c_2 und c_3 bestimmen mit

$$\mathrm{W}(0) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da wir nun $\mathrm{W}(0)^{-1}$ in (b) schon bestimmt haben, erhalten wir dies mittels

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathrm{W}(0)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist also gegeben durch

$$y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \cos(x).$$