Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 7

Hausaufgabe 19 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y'' + 16y' + 16y \;=\; 0.$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ an.

(b) Berechnen Sie $p(2\mathrm{i})$. Was folgt für $p(-2\mathrm{i})$?
Zerlegen Sie $p(X)$ in ein Produkt von Faktoren von Grad 1.

(c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom $p(X)$ für die Differentialgleichung ist gegeben durch

$$p(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 16X + 16.$$

(b) Wir setzen $X = 2\mathrm{i}$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} p(2\mathrm{i}) &= (2\mathrm{i})^4 + 4(2\mathrm{i})^3 + 8(2\mathrm{i})^2 + 16(2\mathrm{i}) + 16 \\ &= 16 - 32\mathrm{i} - 32 + 32\mathrm{i} + 16 = 0, \end{aligned}$$

d.h. $2\mathrm{i}$ ist eine Nullstelle von p. Da $2\mathrm{i}$ eine komplexe Nullstelle des Polynoms ist und das Polynom nur reelle Koeffizienten hat, ist es auch das komplexe Konjugat $-2\mathrm{i}$ eine Nullstelle.

Da $\pm 2\mathrm{i}$ Nullstellen des Polynoms sind, ist das Polynom durch $(X+2\mathrm{i})(X-2\mathrm{i}) = (X^2+4)$ teilbar. Polynomdivision durch (X^2+4) liefert dann die Zerlegung

$$p(X) = (X^2 + 4)(X^2 + 4X + 4).$$

Da $X^2 + 4X + 4 = (X+2)^2$, folgt letztendlich

$$\begin{aligned} p(X) &= (X^2 + 4)(X + 2)(X + 2) \\ &= (X + 2\mathrm{i})(X - 2\mathrm{i})(X + 2)(X + 2). \end{aligned}$$

(c) Da $\pm 2\mathrm{i}$ jeweils einfache Nullstellen und -2 eine doppelte Nullstelle von p sind, ist ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung durch

$$f_1(x) = \cos(2x), \qquad f_2(x) = \sin(2x), \qquad f_3(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \qquad f_4(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$$

gegeben.

(d) Die Differentialgleichung ist homogen, alle Lösungen ergeben sich damit durch Linearkombination der Funktionen des Fundamentalsystems:

$$f(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + c_3\mathrm{e}^{-2x} + c_4x\mathrm{e}^{-2x}$$

mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 20 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x^2} \cdot y \;=\; 1 \quad \text{für} \quad x > 0\,.$$

(a) Wir betrachten die Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = x^{-1}$ auf $\mathbb{R}^+$.

Bestätigen Sie: Es ist f_1, f_2 ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Inverse $\mathrm{W}(x)^{-1}$ der Wronski-Matrix.

(c) Wir haben die Bedingung $\mathrm{W}(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie hieraus Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$.

(d) Verwenden Sie (c), um eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ von $y'' - \frac{2}{x^2} \cdot y = 1$ zu bestimmen.

Lösung.

(a) Wir wollen zunächst prüfen ob f_1 und f_2 überhaupt Lösungen der Differentialgleichung sind und berechnen zunächst alle Ableitungen bis zur 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2, & f_1'(x) &= 2x, & f_2''(x) &= 2, \\ f_2(x) &= \frac{1}{x}, & f_1'(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f_2''(x) &= \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert dann

$$\begin{aligned} f_1''(x) - \frac{2}{x^2} f_1(x) &= 2 - \frac{2}{x^2} \cdot x^2 = 0, \\ f_2''(x) - \frac{2}{x^2} f_2(x) &= \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

und f_1, f_2 sind tatsächlich Lösungen.

Um zu zeigen, dass f_1 und f_2 tatsächlich ein Fundamentalsystem bilden, müssen wir prüfen, ob die Wronski-Matrix an einer Stelle in $\mathbb{R}^+$ invertierbar ist.

Wir wählen die Stelle $x_0 = 1$.

Die Wronski-Matrix ist gegeben durch

$$\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{x} \\ 2x & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}.$$

Also ist $\mathrm{W}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $\det \mathrm{W}(1) = -3 \neq 0$.

Somit bilden $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ein Fundamentalsystem.

(b) Es ist

$$\mathrm{W}^{-1}(x) = \frac{1}{\det(W(x))} \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x} \\ -2x & x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2x & -x^2 \end{pmatrix}.$$

(c) Aus der gegebenen Bedingung erhalten wir $\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \mathrm{W}^{-1}(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Setzen wir $\mathrm{W}^{-1}(x)$ von oben ein, so folgt

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2x & -x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ -x^2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen c_1 und c_2 erhält man nun durch Integration:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \ln(x), \\ c_2(x) &= -\frac{1}{3} \int x^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{9} x^3. \end{aligned}$$

(d) Nach Satz 5.2.1 aus der Vorlesung ist die Partikulärlösung nun gegeben durch

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{p}}(x) &= c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x) \\ &= \frac{1}{3} x^2 \ln(x) - \frac{1}{9} x^2. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 21 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y' \; = \; x\mathrm{e}^x \; .$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ für $y'' - y' = x\mathrm{e}^x$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ für $y'' - y' = x\mathrm{e}^x$.

Lösung.

(a) Für das charakteristische Polynom erhalten wir

$$p(X) = X^2 - X = X(X-1)$$

mit Nullstellen 0 und 1. Das zugehörige Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$f_1(x) = 1, \qquad\qquad f_2(x) = \mathrm{e}^x.$$

(b) Die rechte Seite der Gleichung hat die Form $r(x)\mathrm{e}^{\mu x}$ wobei $r(x)$ ein Polynom Grad 1 und $\mu = 1$ ist.

Da μ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit Vielfachheit 1 ist, liegt der Resonanzfall vor mit $m = 1$.

Wir setzen an:

$$f(x) = x(ax+b)\mathrm{e}^x = (ax^2 + bx)\mathrm{e}^x.$$

Die Parameter lassen sich nun auf zwei Arten bestimmen:

(1) Wir berechnen die Ableitungen des Ansatzes bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2ax+b)\mathrm{e}^x + (ax^2+bx)\mathrm{e}^x \;=\; (ax^2 + (2a+b)x + b)\mathrm{e}^x \\ f''(x) &= (2ax+2a+b)\mathrm{e}^x + (ax^2+(2a+b)x+b)\mathrm{e}^x \;=\; (ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b)\mathrm{e}^x \; . \end{aligned}$$

Wir setzen in die Differentialgleichung ein:

$$(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b)\mathrm{e}^x - (ax^2 + (2a+b)x + b)\mathrm{e}^x \;=\; x\mathrm{e}^x$$

Dies gibt

$$2ax + 2a + b \;=\; x$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{2}$ und $b = -2a = -1$.
Somit ist $f_{\mathrm{p}}(x) = x(\frac{1}{2}x - 1)\mathrm{e}^x$ eine partikuläre Lösung.

(2) Wir verwenden die in 5.3.4 beschriebene alternative Methode:
Wir werten das charakteristische Polynom in $\mathrm{D} + \mu$ aus, wobei D der Differentialoperator und $\mu = 1$ ist.
Da $p(X+1) = (X+1)((X+1)-1) = X^2 + X$ ist, ist $p(\mathrm{D}+1) = \mathrm{D}^2 + \mathrm{D}$.

Dann wenden wir $p(\mathrm{D}+1)$ auf den Polynomteil des Ansatzes an und setzen dies gleich mit dem Polynomanteil der rechten Seite:

$$\begin{aligned} p(\mathrm{D}+1)(ax^2+bx) &= x \\ (\mathrm{D}^2+\mathrm{D})(ax^2+bx) &= x \\ 2a+2ax+b &= x \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $a=\frac{1}{2}$ und $b=-2a=-1$.
Somit ist $f_\mathrm{p}(x)=x(\frac{1}{2}x-1)\mathrm{e}^x$ eine partikuläre Lösung.

(c) Die allgemeine Lösung und ihre erste Ableitung sind

$$\begin{aligned} f(x) &= f_\mathrm{p}(x)+c_1f_1(x)+c_2f_2(x) \\ &= \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + c_1 + c_2\mathrm{e}^x, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x + \cancel{x\mathrm{e}^x} - \cancel{x\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1+c_2 = 0, \\ f'(0) &= c_2-1 = 1, \end{aligned}$$

und schließlich $c_2=2$, $c_1=-2$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist daher

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 2 + 2\mathrm{e}^x.$$