Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 8

Hausaufgabe 22 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$(*) \qquad y'' + 4y \;=\; \mathrm{e}^{2x}\sin(x) + x\cos(2x)$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ und ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie partikuläre Lösungen zu $y'' + 4y = \mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}$ und zu $y'' + 4y = x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$.

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von $(*)$ unter Verwendung von (b).
Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen von $(*)$.

Lösung.

(a) Die zu $(*)$ gehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$y'' + 4y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$p(X) = X^2 + 4 = (X - 2\mathrm{i})(X + 2\mathrm{i}).$$

Das Polynom hat die komplexen Nullstellen $2\mathrm{i}$ und $-2\mathrm{i}$. Also erhalten wir die Lösungen

$$f_1(x) = \cos(2x), \qquad f_2(x) = \sin(2x)\,,$$

und f_1, f_2 ist ein Fundamentalsystem.

(b) Wir beginnen zunächst mit der Differentialgleichung

$$y'' + 4y = \mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}.$$

Wir schreiben die rechte Seite als

$$\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} =: r(x)\mathrm{e}^{\mu x}$$

mit $r(x) = 1$ und $\mu = 2 + \mathrm{i}$.

Wir haben $d = 0$, da $r(x) = 1$ ein Polynom von Grad 0 ist.

Zudem ist

$$p(\mu) \;=\; p(2 + \mathrm{i}) \;\neq\; 0\,,$$

da $p(X)$ nur die Nullstellen $\pm 2\mathrm{i}$ hat. Somit liegt nicht der Resonanzfall vor.

Unsere partikuläre Lösung hat also die Form $f_\mathrm{p}(x) = C \cdot \mathrm{e}^{\mu x}$ für ein $C \in \mathbb{C}$.

Wir berechnen

$$f_\mathrm{p}'(x) = \mu C \cdot \mathrm{e}^{\mu x}\,,\; f_\mathrm{p}''(x) = \mu^2 C \cdot \mathrm{e}^{\mu x}$$

und setzen das in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} e^{\mu x} &\stackrel{!}{=} f_p''(x) + 4f_p(x) \\ &= \mu^2 C \cdot e^{\mu x} + 4C \cdot e^{\mu x} \\ &= (\mu^2 + 4)C \cdot e^{\mu x} \,. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich bei $e^{\mu x}$ liefert $1 \stackrel{!}{=} (\mu^2 + 4)C$. Also ist

$$C = \frac{1}{\mu^2 + 4} = \frac{1}{(2 + i)^2 + 4} = \frac{1}{7 + 4i} = \frac{7 - 4i}{65} \,.$$

Demnach ist die partikuläre Lösung zu $y'' + 4y = e^{(2+i)x}$ gegeben durch

$$f_p(x) = \frac{7 - 4i}{65} \cdot e^{(2+i)x} \,.$$

Als Nächstes betrachten wir die zweite Differentialgleichung

$$y'' + 4y = xe^{2ix}.$$

Wir schreiben die rechte Seite als

$$e^{2ix} =: q(x)e^{\lambda x}$$

mit $q(x) = x$ und $\lambda = 2i$.

Wir haben $d = 1$, da $q(x) = x$ ein Polynom von Grad 1 ist.

Zudem stellen wir fest, dass $\lambda = 2i$ eine einfache Nullstelle von $p(x)$ ist. Also befinden wir uns im Resonanzfall mit $m = 1$, und die partikuläre Lösung hat die Form

$$g_p(x) = x(ax + b)e^{\lambda x} = (ax^2 + bx)e^{\lambda x}$$

mit a, $b \in \mathbb{C}$.

Wie berechnen $g_p(x)$ durch Einsetzen in die DGL.

Wir haben

$$\begin{aligned} g_p(x) &= (ax^2 + bx)e^{2ix} \\ g_p'(x) &= \big(i2a \cdot x^2 + (2a + i2b)x + b\big)e^{2ix} \\ g_p''(x) &= \big(-4a \cdot x^2 + (i8a - 4b)x + 2a + i4b\big)e^{2ix} \,. \end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} xe^{2ix} &\stackrel{!}{=} g_p''(x) + 4 \cdot g_p(x) \\ &= \big(-4a \cdot x^2 + (i8a - 4b)x + 2a + i4b\big)e^{2ix} + 4 \cdot (ax^2 + bx)e^{2ix} \\ &= (i8a \cdot x + 2a + i4b)e^{2ix} \,. \end{aligned}$$

Das führt zur Gleichung

$$x \stackrel{!}{=} i8a \cdot x + 2a + i4b \,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{i}8a \\ 0 &= 2a + \mathrm{i}4b \,. \end{aligned}$$

Das hat $a = \frac{-\mathrm{i}}{8}$ und $b = \frac{1}{16}$ als eindeutige Lösung.

Somit ist $g_{\mathrm{p}}(x) = \left(\frac{-\mathrm{i}x^2}{8} + \frac{x}{16}\right) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ die gesuchte partikuläre Lösung.

Alternativ: Wir berechnen $g_{\mathrm{p}}(x)$ mit Operatorenkalkül.

Zunächst ist $p(X + \mu) = p(X + 2\mathrm{i}) = (X + 2\mathrm{i})^2 + 4 = X^2 + 4\mathrm{i}X$.

Wir setzen wie folgt an.

$$\begin{aligned} x &\overset{!}{=} p(D + 2\mathrm{i})(ax^2 + bx) \\ &= (D^2 + 4\mathrm{i}D)(ax^2 + bx) \\ &= (ax^2 + bx)'' + 4\mathrm{i} \cdot (ax^2 + bx)' \\ &= 2a + 4\mathrm{i} \cdot (2ax + b) \\ &= \mathrm{i}8a \cdot x + (2a + \mathrm{i}4b) \,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert wieder das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{i}8a \\ 0 &= 2a + \mathrm{i}4b \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $a = \frac{-\mathrm{i}}{8}$ und $b = \frac{1}{16}$.

Auf diese Weise kommt man wieder zur selben partikulären Lösung $g_{\mathrm{p}}(x) = \left(\frac{-\mathrm{i}x^2}{8} + \frac{x}{16}\right) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$.

(c) Wir betrachten die rechten Seiten der Differentialgleichungen aus (b).

Wir haben

$$\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{2x}\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right) = \mathrm{e}^{2x}\cos(x) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{2x}\sin(x) \,.$$

Also ist

$$\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}\right) = \mathrm{e}^{2x}\sin(x) \,.$$

Wir haben

$$x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = x\left(\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x)\right) = x\cos(2x) + \mathrm{i}x\sin(2x) \,.$$

Also ist

$$\mathrm{Re}\left(x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right) = x\cos(2x) \,.$$

Wir stellen zudem fest, dass die rechte Seite von $(*)$ sich schreiben lässt als

$$\mathrm{e}^{2x}\sin(x) + x\cos(2x) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}\right) + \mathrm{Re}\left(x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right) \,.$$

Somit ist die partikuläre Lösung von $(*)$ gegeben durch

$$h_{\mathrm{p}}(x) = \mathrm{Im}(f_{\mathrm{p}}(x)) + \mathrm{Re}(g_{\mathrm{p}}(x)) \,,$$

wobei $f_{\mathrm{p}}(x)$ und $g_{\mathrm{p}}(x)$ die partikulären Lösungen aus (b) sind.

Wir berechnen $\mathrm{Im}(f_\mathrm{p}(x))$. Es ist

$$\begin{aligned}
f_\mathrm{p}(x) &= \frac{7-4\mathrm{i}}{65}\cdot \mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x}\\
&= \left(\frac{7}{65}-\frac{4\mathrm{i}}{65}\right)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\\
&= \left(\frac{7}{65}-\frac{4\mathrm{i}}{65}\right)\mathrm{e}^{2x}\left(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)\right)\\
&= \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{7}{65}\cos(x)+\frac{4}{65}\sin(x)\right)+\mathrm{i}\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{7}{65}\sin(x)-\frac{4}{65}\cos(x)\right).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{Im}(f_\mathrm{p}(x)) = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{7}{65}\sin(x)-\frac{4}{65}\cos(x)\right).$$

Wir berechnen $\mathrm{Re}(g_\mathrm{p}(x))$. Es ist

$$\begin{aligned}
g_\mathrm{p}(x) &= \left(\frac{-\mathrm{i}x^2}{8}+\frac{x}{16}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\\
&= \left(\frac{-\mathrm{i}x^2}{8}+\frac{x}{16}\right)\left(\cos(2x)+\mathrm{i}\sin(2x)\right)\\
&= \left(\frac{x^2}{8}\sin(2x)+\frac{x}{16}\cos(2x)\right)+\mathrm{i}\left(-\frac{x^2}{8}\cos(2x)+\frac{x}{16}\sin(x)\right).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{Re}(g_\mathrm{p}(x)) = \frac{x^2}{8}\sin(2x)+\frac{x}{16}\cos(2x).$$

Also ist ingesamt

$$h_\mathrm{p}(x) = \mathrm{Im}(f_\mathrm{p}(x))+\mathrm{Re}(g_\mathrm{p}(x)) = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{7}{65}\sin(x)-\frac{4}{65}\cos(x)\right)+\frac{x^2}{8}\sin(2x)+\frac{x}{16}\cos(2x).$$

Aus (a) kennen wir das Fundamentalsystem f_1, f_2 von $(*)$. Damit ist die Menge aller Lösungen von $(*)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\{c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+h_\mathrm{p}(x) : c_1, c_2\in\mathbb{R}\}\\
=\ &\left\{c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+\mathrm{e}^{2x}\left(\tfrac{7}{65}\sin(x)-\tfrac{4}{65}\cos(x)\right)+\tfrac{x}{16}\cos(2x)+\tfrac{x^2}{8}\sin(2x) : c_1, c_2\in\mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 23 Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten.

(a) $\mathcal{L}((a+bt)^2)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$

(b) $\mathcal{L}(\mathrm{e}^t \sinh(t)\sin(t))$

(c) $\mathcal{L}(f(t))$, wobei $f(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leqslant t \end{cases}$

(d) $\mathcal{L}(t\sin(t-\frac{\pi}{4}))$

Lösung.

(a) Wir verwenden die Transformationsregel $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ und die Linearität der Laplace-Transformation. Dann ist

$$\mathcal{L}((a+bt)^2) = \mathcal{L}\left(a^2 + b^2t^2 + 2abt\right) = a^2\mathcal{L}(1) + b^2\mathcal{L}(t^2) + 2ab\mathcal{L}(t) = \frac{a^2}{s} + \frac{2b^2}{s^3} + \frac{2ab}{s^2}.$$

(b) Es ist

$$\sinh(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2},$$

daraus folgt

$$\mathrm{e}^t\sinh(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t} - 1}{2}.$$

Wir verwenden $\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \dfrac{\omega^2}{s^2+\omega^2}$, die Dämpfungsregel $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}f(t)) = F(s-a)$ und die Linearität der Laplace-Transformation.

Dann ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathrm{e}^t\sinh(t)\sin(t)) &= \mathcal{L}\left(\frac{(\mathrm{e}^{2t}-1)}{2}\sin(t)\right)\\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(t)\right)\\ &= \frac{1}{2}\big(\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{2t}\sin(t)\right) - \mathcal{L}\left(\sin(t)\right)\big)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right).\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen $\mathcal{L}(f(t))$ direkt über die Definition der Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}dt.$$

Wir zerlegen den Definitionsbereich $[0,+\infty) = [0,1] \cup (1,+\infty)$ und nutzen die Additivität des Integrals aus. Damit ergibt sich

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_1^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t}_{=:I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t}_{=:I_2}.$$

Wir berechnen das Integral I_1 mit partieller Integration:

$$I_1 = \int_0^1 t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \left[t \cdot \frac{-\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 1 \cdot \frac{-\mathrm{e}^{-st}}{s}\,\mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{e}^{-s}}{s} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{-\mathrm{e}^{-s}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\,.$$

Dazu sollte also $s > 0$ sein.

Wir berechnen das Integral I_2. Wir haben das unbestimmte Integral

$$\int \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]\,.$$

Also ist

$$I_2 = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-s\beta}}{s}\right) - \frac{-\mathrm{e}^{-s\cdot 1}}{s} = \frac{0}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2} = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\,.$$

Auch dazu sollte $s > 0$ sein.

Insgesamt haben wir

$$\mathcal{L}(f(t)) = I_1 + I_2 = \frac{-\mathrm{e}^{-s}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} = \frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s^2}$$

für $s > 0$.

(d) Mit Euler-de Moivre ist

$$t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)} = t\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right) = t\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,t\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\operatorname{Im}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = t\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\,.$$

Wir berechnen zunächst $\mathcal{L}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$.

Wir haben

$$t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)} = t\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}t.$$

Wir verwenden $\mathcal{L}(t) = \dfrac{1}{s^2}$ und die Dämpfungsregel $\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at}f(t)\right) = F(s-a)$.

Somit wird

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}\right) &= \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}t\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}t\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}\frac{1}{(s-\mathrm{i})^2}\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}\frac{(s^2-1)+2\mathrm{i}s}{((s^2-1)-2\mathrm{i}s)\,((s^2-1)+2\mathrm{i}s)}\\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{(s^2-1+2\mathrm{i}s)}{(s^2-1)^2-4\mathrm{i}^2s^2}\\
&= \frac{(1-\mathrm{i})}{\sqrt{2}}\frac{(s^2-1+2\mathrm{i}s)}{s^4+1+2s^2}\\
&= \frac{(1-\mathrm{i})}{\sqrt{2}}\frac{(s^2-1+2\mathrm{i}s)}{(s^2+1)^2}\\
&= \frac{s^2-1+2s}{\sqrt{2}(s^2+1)^2} + \mathrm{i}\,\frac{1-s^2+2s}{\sqrt{2}(s^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{L}\left(t\sin(t-\frac{\pi}{4})\right) = \mathcal{L}\left(\mathrm{Im}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}\right)\right) = \mathrm{Im}\left(\mathcal{L}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}\right)\right) = \frac{1-s^2+2s}{\sqrt{2}(s^2+1)^2}\,.$$

Alternatives Vorgehen. Allgemein ist nach 5.4.9:

$$\mathcal{L}(f(t)) \;=\; F(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}(-t\cdot f(t)) \;=\; F'(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}(t\cdot f(t)) \;=\; -F'(s)\,.$$

Bei uns ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin(t-\tfrac{\pi}{4})) \;&=\; \mathcal{L}(\sin(t)\cos(-\tfrac{\pi}{4})+\cos(t)\sin(-\tfrac{\pi}{4}))\\ &=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}(\sin(t)) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}(\cos(t)) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{s}{s^2+1} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{s-1}{s^2+1}\,.\end{aligned}$$

Also wird

$$\mathcal{L}(t\sin(t-\frac{\pi}{4})) \;=\; -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{s-1}{s^2+1}\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(s^2+1)\cdot 1-(s-1)\cdot 2s}{(s^2+1)^2} \;=\; \frac{1-s^2+2s}{\sqrt{2}(s^2+1)^2}\,.$$

Hausaufgabe 24

Finden Sie zu der jeweils gegebenen Funktion $F(s)$ die Funktion $f(t)$, welche als Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ hat.

(a) $F(s) = \dfrac{2}{(s-1)^2}$

(b) $F(s) = \dfrac{s+10}{s^2-s-2}$

(c) $F(s) = \dfrac{6s}{(s+1)^3}$

(d) $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2-2s+2}$

Lösung.

(a) Wir verwenden $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$, die Dämpfungsregel $\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at} f(t)\right) = F(s-a)$ und die Linearität der Laplace-Transformation, und erhalten

$$\mathcal{L}\left(2t\mathrm{e}^t\right) = 2\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^t t\right) = \frac{2}{(s-1)^2}\,.$$

Also ist $f(t) = 2t\mathrm{e}^t$ die gesuchte Funktion.

(b) Wir führen zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.

Wir faktorisieren $s^2 - s - 2 = (s-2)(s+1)$. Also lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{s+10}{s^2-s-2} \overset{!}{=} \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} \qquad \text{mit } A\,, B \in \mathbb{R}\,.$$

Multiplikation auf beiden Seiten mit $(s-2)(s+1)$ führt zu der Gleichung

$$\begin{aligned} s + 10 &\overset{!}{=} A(s+1) + B(s-2) \\ &= (A+B)s + A - 2B\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 10 &= A - 2B\,. \end{aligned}$$

Das hat $A = 4$ und $B = -3$ als eindeutige Lösung.

Somit ist

$$\frac{s+10}{s^2-s-2} = \frac{4}{s+2} - \frac{3}{s+1}\,.$$

Mit der Dämpfungsregel und der Linearität wird also

$$\mathcal{L}\left(4\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{-t}\right) = 4\mathcal{L}(\mathrm{e}^{2t}) - 3\mathcal{L}(\mathrm{e}^{-t}) = \frac{4}{s-2} - \frac{3}{s+1} = \frac{s+10}{s^2-s-2}\,.$$

Somit ist $f(t) = 4\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{-t}$ die gesuchte Funktion.

(c) Wir haben

$$\frac{6s}{(s+1)^3} = \frac{6(s+1)-6}{(s+1)^3} = \frac{6(s+1)}{(s+1)^3} - \frac{6}{(s+1)^3} = \frac{6}{(s+1)^2} - \frac{6}{(s+1)^3}.$$

Wir verwenden $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, die Linearität der Laplace-Transformation, und die Dämpfungsregel $\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at} f(t)\right) = F(s-a)$.

Dann erhalten wir

$$\mathcal{L}\left(6t\mathrm{e}^{-t} - 3t^2\mathrm{e}^{-t}\right) = 6\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-t}t\right) - 3\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-t}\,t^2\right) = \frac{6}{s+1} - \frac{3\cdot 2}{(s+1)^3} = \frac{6}{s+1} - \frac{6}{(s+1)^3}$$
$$= \frac{6s}{(s+1)^3}\,.$$

Somit ist $f(t) = 6t\mathrm{e}^{-t} - 3t^2\mathrm{e}^{-t}$ die gesuchte Funktion.

(d) Wir haben

$$s^2 - 2s + 2 \;=\; (s-1)^2 + 1$$

Also können wir schreiben

$$\frac{s-1}{s^2-2s+2} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}.$$

Wir verwenden $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ und die Dämpfungsregel $\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at} f(t)\right) = F(s-a)$.

Dann erhalten wir

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{t}\cos(t)\right) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1^2} = \frac{s-1}{s^2-2s+2}\,.$$

Somit ist $f(t) = \mathrm{e}^{t}\cos(t)$ die gesuchte Funktion.