Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

# Lösung 9

**Hausaufgabe 25** Sei $f(t) = \mathrm{e}^{2t}$. Sei $g(t) = t$.

(a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f''(t))$, ohne 5.4.9 zu verwenden.

(b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f''(t))$ unter Verwendung von 5.4.9. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus (a).

(c) Berechnen Sie die Faltung $f(t) * g(t)$.

(d) Berechnen Sie $\mathcal{L}(f(t) * g(t))$. Vergleichen Sie mit $\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t))$.

*Lösung.*

(a) Wir berechnen die erste und zweite Ableitung der Funktion:

$$f'(t) = 2\mathrm{e}^{2t}, \qquad f''(t) = 4\mathrm{e}^{2t}.$$

Damit erhalten wir als Laplace-Transformation der zweiten Ableitung

$$\mathcal{L}(f''(t)) = 4\,\mathcal{L}(\mathrm{e}^{2t}) = \frac{4}{s-2}.$$

(b) Für die Laplace-Transformation der zweiten Ableitung gilt nach 5.4.9

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$$

wobei $F(s)$ die Laplace-Transformation von $f(t)$ ist, d.h.

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s-2}.$$

Durch Einsetzen von F(s) in die Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f''(t)) &= s^2 \frac{1}{s-2} - s - 2 \\ &= \frac{s^2 - s^2 + 2s - 2s + 4}{s-2} \\ &= \frac{4}{s-2}.\end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt mit dem überein, das man durch direkte Transformation der zweiten Ableitung erhält.

(c) Da die Faltung kommutiert, können wir anstelle von $f(t) * g(t)$ auch einfacher $g(t) * f(t)$ berechnen:

$$f(t) * g(t) \;=\; g(t) * f(t) \;=\; \int_0^t g(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t (t-\tau)\mathrm{e}^{2\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t t\mathrm{e}^{2\tau} - \int_0^t \tau\mathrm{e}^{2\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

Für das zweite Integral wenden wir partielle Integration an und fahren fort:

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \frac{t}{2}[\mathrm{e}^{2\tau}]_0^t - \frac{1}{2}[\tau \mathrm{e}^{2\tau}]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{2\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{t}{2}[\mathrm{e}^{2\tau}]_0^t - \frac{1}{2}[\tau \mathrm{e}^{2\tau}]_0^t + \frac{1}{4}[\mathrm{e}^{2\tau}]_0^t \\ &= \frac{t}{2}\mathrm{e}^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{t}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(d) Die Laplace-Transformation der Faltung lässt sich direkt berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t) * g(t)) &= \mathcal{L}\left(-\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}(t) + \frac{1}{4}\mathcal{L}(\mathrm{e}^{2t}) - \frac{1}{4}\mathcal{L}(1) \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{\cancel{-2s} + 4 + \cancel{s^2} - \cancel{s^2} + \cancel{2s}}{s^2(s-2)} \\ &= \frac{1}{s^2(s-2)}. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) \;=\; \mathcal{L}(\mathrm{e}^{2t}) \cdot \mathcal{L}(t) \;=\; \frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(s-2)}.$$

Im vorliegenden Fall bestätigt sich also, daß $\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t))$ ist.

**Hausaufgabe 26** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y \;=\; 8\sinh(t),$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Sei $f(t)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der entstehenden Gleichung an.

(b) Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (a).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstehenden Ausdruck an.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.

*Lösung.*

(a) Da $f(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, gilt

$$f''(t) - 2f'(t) + f(t) \;=\; 8\sinh(t),$$

Da $f(t)$ auch die Anfangsbedingungen erfüllt, ist zudem $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.

Laplace-Transformation auf beiden Seiten liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} s^2F(s) - sf(0) - f'(0) - 2sF(s) - f(0) + F(s) \;&=\; 8\mathcal{L}\left(\sinh(t)\right) \\ &=\; 4\mathcal{L}(\mathrm{e}^t) - 4\mathcal{L}(\mathrm{e}^{-t}) \\ &=\; \frac{4}{s-1} - \frac{4}{s+1}\,, \end{aligned}$$

wegen der Anfangsbedingungen also

$$s^2F(s) - 2sF(s) + F(s) \;=\; \frac{4}{s-1} - \frac{4}{s+1}.$$

(b) Wir bestimmen $F(s)$:

$$\begin{aligned} s^2F(s) - 2sF(s) + F(s) &= \frac{4}{s-1} - \frac{4}{s+1} \\ F(s)(s^2 - 2s + 1) &= \frac{4}{s-1} - \frac{4}{s+1} \\ F(s)(s-1)^2 &= \frac{4}{s-1} - \frac{4}{s+1} \\ F(s) &= \frac{4}{(s-1)^3} - \frac{4}{(s+1)(s-1)^2}. \end{aligned}$$

Der erste Bruch liegt bereits in einer für die Laplace-Transformation geeigneten Form vor.
Auf den zweiten Bruch wenden wir Partialbruchzerlegung an.

$$\begin{aligned} \frac{4}{(s+1)(s-1)^2} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-1} \\ &= \frac{A(s-1)^2 + B(s+1) + C(s^2-1)}{(s+1)(s-1)^2} \quad = \frac{As^2 + A - 2As + Bs + B + Cs^2 - C}{(s+1)(s-1)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} As^2 + Cs^2 = 0 \\ -2As + Bs = 0 \\ A + B - C = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} C = -A \\ B = 2A \\ A + 2A + A = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ B = 2 \\ A = 1 \end{cases} .$$

Damit wird

$$F(s) \;=\; \frac{4}{(s-1)^3} - \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}.$$

(c) Wir können nun $f(t)$ über die inverse Laplace-Transformation bestimmen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \\ &= 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\ &= 2\mathrm{e}^t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - 2\mathrm{e}^t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\ &= 2\mathrm{e}^t t^2 - \mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^t t + \mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

**Hausaufgabe 27** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y \ = \ \mathrm{e}^t,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Sei $f(t)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems.

(a) Sei $u(t)$ die Lösung von $y'' - 4y' + 4y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Bestimmen Sie $U(s) := \mathcal{L}(u(t))$.

(b) Bestimmen Sie $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s))$.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung: $f(t) = u(t) * \mathrm{e}^t$.

*Lösung.*

(a) Sei $p(X)$ das charakteristische Polynom der Differentialgleichung aus (a). Die Laplace-Transformation $F(s)$ ist dann gegeben durch

$$F(s) = \frac{1}{p(s)} = \frac{1}{s^2 - 4s + 4} = \frac{1}{(s-2)^2}.$$

(b) Wir bestimmen $u(t)$ mittels der inversen Laplace-Transformation

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) = \mathrm{e}^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \mathrm{e}^{2t}t.$$

(c) Die Lösung der Differentialgleichung $f(t)$ erhalten wir nun durch Faltung:

$$\begin{aligned} f(t) &= t\mathrm{e}^{2t} * \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t * t\mathrm{e}^{2t} \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\ \tau\mathrm{e}^{2\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^t \int_0^t \tau\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^t\left([\tau\mathrm{e}^\tau]_0^t - \int_0^t \mathrm{e}^\tau\,\mathrm{d}\tau\right) = \mathrm{e}^t\left([\tau\mathrm{e}^\tau]_0^t - [\mathrm{e}^\tau]_0^t\right) \\ &= \mathrm{e}^t\left(t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1\right) = t\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^t. \end{aligned}$$