Jha, Künzer, Nottoli

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 10

Hausaufgabe 28 Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_3' &= 2y_3 \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das System in der Form $y' = Ay$ mit einer geeigneten Matrix A. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Sei $B := A - 3\mathrm{E}_3$. Sei $v := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Man bestimme $k \geqslant 0$ minimal mit $B^k v = 0$.

(c) Man bestimme ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

(d) Man bestimme die Lösung $f(x)$ von $y' = Ay$ mit $f(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösung.

(a) Seien $y := \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$ und $A := \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann können wir das Differentialgleichungssystem wie folgt umschreiben.

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Ay$$

Um die Eigenwerte von A zu finden, berechnen wir die Nullstellen der Determinante von $(A - \lambda\mathrm{E}_3)$. Wir haben

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\mathrm{E}_3) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det(2-\lambda) \\ &= \big((4-\lambda)(2-\lambda)+1\big)(2-\lambda) \\ &= (\lambda^2 - 6\lambda + 9)(2-\lambda) \\ &= (3-\lambda)^2(2-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind demnach $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$.

(b) Wir haben

$$B = A - 3\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned}
Bv &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
B^2 v &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Folglich ist $k = 2$.

(c) Aus (a) kennen wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ von A.

Wir berechnen einen Eigenvektor zum Eigenwert 2:

Sei $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{smallmatrix}\right)$. Wir setzen an mit

$$0 = (A - 2\mathrm{E}_3)v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{smallmatrix}\right) .$$

Das führt zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2v_{1,1} + v_{1,2} + v_{1,3} &= 0 \\ v_{1,1} &= 0 \, , \end{aligned}$$

was von $v_{1,1} = 0$, $v_{1,2} = -1$ und $v_{1,3} = 1$ gelöst wird.

Also ist $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Dieser Eigenvektor liefert die Lösung

$$f_{[1]}(x) = \mathrm{e}^{2x} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

Bei $\lambda_2 = 3$ stellen wir fest, dass die geometrische Vielfachheit nicht mit der geometrische Vielfachheit des zugehörigen Eigenraums übereinstimmt. Demnach ist A nicht diagonalisierbar.

Wir verwenden (b), um weitere Lösungen $f_{[2]}(x)$ und $f_{[3]}(x)$ zu bestimmen.

Nach Bemerkung 6.1.10 können wir verwenden:

$$\begin{aligned}
f_{[2]}(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot x} Bv = \mathrm{e}^{3x} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) , \\
f_{[3]}(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot x} (x \cdot Bv + v) = \mathrm{e}^{3x} \left(x \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right) = \mathrm{e}^{3x} \left(\begin{smallmatrix} x \\ 1-x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) .
\end{aligned}$$

Es sind

$$f_{[1]}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad f_{[2]}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad f_{[3]}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

linear unabhängig.

Also ist

$$\{f_{[1]}(x) \, , f_{[2]}(x) \, , f_{[3]}(x)\} = \left\{ \mathrm{e}^{2x} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) , \mathrm{e}^{3x} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) , \mathrm{e}^{3x} \left(\begin{smallmatrix} x \\ 1-x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

(d) Da $f_{[1]}(x)\,, f_{[2]}(x)\,, f_{[3]}(x)$ ein Fundamentalsystem ist, ist eine allgemeine Lösung von $y' = Ay$ gegeben durch

$$f(x) = c_1 f_{[1]}(x) + c_2 f_{[2]}(x) + c_3 f_{[3]}(x) \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Wir setzen $x = 0$ in die obige Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &= c_1 \cdot \mathrm{e}^{2\cdot 0}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{3\cdot 0}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + c_3 \cdot \mathrm{e}^{3\cdot 0}\begin{pmatrix}0\\1-0\\0\end{pmatrix}\\ &= c_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\,.\end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem wird eindeutig von $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, und $c_3 = 1$ gelöst.

Also ist

$$f(x) = 0 \cdot f_{[1]}(x) + 1 \cdot f_{[2]}(x) + 1 \cdot f_{[3]}(x) = \mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix}x\\1-x\\0\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix}1+x\\-x\\0\end{pmatrix}$$

die gesuchte Lösung.

Hausaufgabe 29 Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$z''' - 4z' = 0.$$

(a) Verwenden Sie die Substitution $y_1 = z$, $y_2 = z'$, $y_3 = z''$, um ein Differentialgleichungssystem der Form $y' = Ay$ aufzustellen.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

(c) Leiten Sie aus dem in (b) gefundenen Fundamentalsystem für $y' = Ay$ ein Fundamentalsystem für $z''' - 4z' = 0$ her.

Leiten Sie mit Hilfe der Methode des charakteristischen Polynoms $p(X)$ abermals ein Fundamentalsystem für $z''' - 4z' = 0$ her.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung.

(a) Mit den Umformungen $y_1 = z$, $y_2 = z'$ und $y_3 = z''$ erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= z' &&= y_2 \\ y_2' &= z'' &&= y_3 \\ y_3' &= z''' = 4z' &&= 4y_2. \end{aligned}$$

Mit $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ und $A := \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&4&0 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&4&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Ay\,.$$

(b) Um ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung zu finden, müssen wir die Eigenwerte von A und dazugehörige Eigenvektoren bestimmen.

Wir haben

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{E}_3) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \det(-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \cdot (\lambda^2 - 4) = -\lambda \cdot (\lambda - 2)(\lambda + 2)\,. \end{aligned}$$

Also sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -2$ die Eigenwerte von A.

Wir bestimmen einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$:

Wir setzen an mit

$$(A - 0\mathrm{E}_3)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese lineare Gleichungssystem wird von $v_{1,1} = 1$, $v_{1,2} = 0$ und $v_{1,3} = 0$ gelöst.

Also ist $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ eine Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$.

Dieser Eigenvektor liefert die Lösung

$$f_{[1]}(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot x} v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) .$$

Wir bestimmen einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$:

Wir setzen an mit

$$(A - 2\mathrm{E}_3)v_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Diese lineare Gleichungssystem wird von $v_{2,1} = 1$, $v_{2,2} = 2$ und $v_{2,3} = 4$ gelöst.

Wir erhalten den Eigenvektor $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\4\end{smallmatrix}\right)$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

Dieser Eigenvektor liefert die Lösung

$$f_{[2]}(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot x} v_2 = \mathrm{e}^{2x} \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\4\end{smallmatrix}\right) .$$

Wir bestimmen einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -2$:

Wir setzen an mit

$$(A + 2\mathrm{E}_3)v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ v_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Diese lineare Gleichungssystem wird von $v_{3,1} = 1$, $v_{3,2} = -2$ und $v_{3,3} = 4$ gelöst.

Also ist $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\4\end{smallmatrix}\right)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = -2$.

Dieser Eigenvektor liefert die Lösung

$$f_{[3]}(x) = \mathrm{e}^{\lambda_3 \cdot x} v_3 = \mathrm{e}^{-2x} \left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\4\end{smallmatrix}\right) .$$

Insgesamt ist also

$$\left\{ f_{[1]}(x) \, , f_{[2]}(x) \, , f_{[3]}(x) \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) , \mathrm{e}^{2x} \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\4\end{smallmatrix}\right) , \mathrm{e}^{-2x} \left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\4\end{smallmatrix}\right) \right\}$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

(c) *Wir leiten ein Fundamentalsystem für $z''' - 4z' = 0$ aus (b) ab.*

Aus (b) ist das folgende Fundamentalsystem für $y' = Ay$ bekannt

$$\left\{ f_1(x) \, , f_2(x) \, , f_3(x) \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) , \mathrm{e}^{2x} \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\4\end{smallmatrix}\right) , \mathrm{e}^{-2x} \left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\4\end{smallmatrix}\right) \right\} .$$

Eine allgemeine Lösung für $y' = Ay$ ist daher gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Insbesondere ist dann

$$f_1(x) \;=\; c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_3 \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

eine allgemeine Lösung für $y_1 = z$.

Also ist $1\,, \mathrm{e}^{2x}\,, \mathrm{e}^{-2x}$ ein Fundamentalsystem von $z''' - 4z' = 0$.

Wir bestimmen ein Fundamentalsystem für $z''' - 4z' = 0$ mit Hilfe der Methode des charakteristischen Polynoms.

Das charakteristische Polynom von $z''' - 4z' = 0$ ist

$$p(X) = X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)\,.$$

Das hat die Nullstellen 0, 2 und -2.

Also ist $1\,, \mathrm{e}^{2x}\,, \mathrm{e}^{-2x}$ ein Fundamentalsystem von $z''' - 4z' = 0$.

Beide Fundamentalsysteme stimmen überein.

Hausaufgabe 30

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und zugehörige Eigenvektoren.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$. Geben Sie $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ an.

(c) Man bestimme $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0)^{-1}$. Man bestimme $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1}$.

(d) Man bestimme eine Partikulärlösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ von $y' = Ay + \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Man bestimme die Menge aller Lösungen von $y' = Ay + \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) Es ist

$$\det(A - \lambda \mathrm{E}_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} (-1)^{1+1} \cdot (-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\lambda(\lambda^2 + 1) = -\lambda(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i}) ,$$

wobei bei $(*)$ nach der zweiten Spalte entwickelt wird.

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}$.

Wir bestimmen einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$:

Wir setzen an mit

$$(A - 0\mathrm{E}_3)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Diese lineare Gleichungssystem wird von $v_{1,1} = 0$, $v_{1,2} = 1$ und $v_{1,3} = 0$ gelöst.

Damit ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$.

Wir bestimmen einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \mathrm{i}$:

Wir setzen an mit

$$(A - \mathrm{i}\mathrm{E}_3)v_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wir formen wie folgt um.

$$\left(\begin{array}{rrr||r} -\mathrm{i} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist $v_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \mathrm{i}$.

Wir bestimmen einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = -\mathrm{i}$:

Da der Eigenwert $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = \mathrm{i}$ komplex konjugiert ist, erhalten wir einen Eigenvektor v_3 als das komplex Konjugierte von v_2.

Damit ist $v_3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = -\mathrm{i}$.

(b) Der Eigenwert $\lambda_1 = 0$ zusammen mit dem Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert die Lösung

$$f_{[1]}(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot x} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben $\alpha = 0$ und $\beta = 1$. Dann ist $\lambda_2 = \mathrm{i} = \alpha + \mathrm{i}\beta$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i} = \alpha - \mathrm{i}\beta$.

Wir schreiben $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $v_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u + \mathrm{i}v$ und $v_3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u - \mathrm{i}v$.

Dann sind

$$f_{[2]}(x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda_2 x} v_2) = \mathrm{e}^{\alpha x} \left(\cos(\beta x) u - \sin(\beta x) v\right) = \cos(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

und

$$f_{[3]}(x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda_2 x} v_2) = \mathrm{e}^{\alpha x} \left(\sin(\beta x) u + \cos(\beta x) v\right) = \sin(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$

Lösungen von $y' = Ay$.

Die Wronskimatrix des Systems ist also gegeben durch

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x) = \begin{pmatrix} f_{[1]}(x) & f_{[2]}(x) & f_{[3]}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(x) & \cos(x) \\ 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Bei $x = 0$ erhalten wir die reguläre Matrix

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Also ist $f_{[1]}(x)$, $f_{[2]}(x)$, $f_{[3]}(x)$ ein Fundamentalsystem.

(c) Wir haben

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung von $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}^{-1}(0)$ verwenden wir den Gauß-Algorithmus.

Es ist

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Also ist

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Für $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}^{-1}(x)$ ist dann

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}^{-1}(x) &= \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}^{-1}(0) \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(-x) \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}^{-1}(0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sin(x) & \cos(x) \\ 1 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\sin(x) & 0 & \cos(x) \\ \cos(x) & 0 & \sin(x) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(d) Zu lösen ist die Gleichung

$$c'(x) \stackrel{!}{=} \mathrm{W}_{\mathrm{sys}}^{-1}(x) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) ,$$

also

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\sin(x) & 0 & \cos(x) \\ \cos(x) & 0 & \sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x\sin(x) \\ x\cos(x) \end{pmatrix} .$$

Durch Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} &[c_1(x)] = \int x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right] \\ &[c_2(x)] = -\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\left([-x\cos(x)] + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x\right) = [x\cos(x) - \sin(x)] \\ &[c_3(x)] = \int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left([x\sin(x)] - \int \sin(x)\,\mathrm{d}x\right) = [x\sin(x) + \cos(x)] . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{p}}(x) &= c_1(x) f_{[1]}(x) + c_2(x) f_{[2]}(x) + c_3(x) f_{[3]}(x) \\
&= \frac{x^3}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (x\cos(x)-\sin(x))\begin{pmatrix}-\sin(x)\\ \cos(x)\\ \cos(x)\end{pmatrix} + (x\sin(x)+\cos(x))\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \sin(x)\\ \sin(x)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x\cos(x)\sin(x) + \sin(x)^2 + x\cos(x)\sin(x) + \cos(x)^2 \\ \frac{x^3}{3} + x\cos(x)^2 - \sin(x)\cos(x) + x\sin(x)^2 + \sin(x)\cos(x) \\ x\cos(x)^2 - \sin(x)\cos(x) + x\sin(x)^2 + \sin(x)\cos(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x^3}{3} + x \\ x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Menge aller Lösungen von $y' = Ay + \left(\begin{smallmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\left\{ f_{\mathrm{p}}(x) + a_1 f_{[1]}(x) + a_2 f_{[2]}(x) + a_3 f_{[3]}(x) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
= &\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \frac{x^3}{3}+x \\ x \end{smallmatrix}\right) + a_1 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + a_2 \left(\begin{smallmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ \cos(x) \end{smallmatrix}\right) + a_3 \left(\begin{smallmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \sin(x) \end{smallmatrix}\right) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$