Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 11

Hausaufgabe 31 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = |\sin(x)|.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

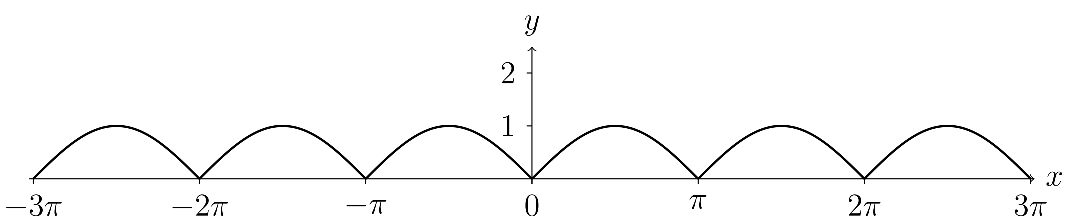
(c) Verwenden Sie die Gleichheit $f(\frac{\pi}{2}) = \mathrm{Fourier}_f(\frac{\pi}{2})$, um

$$2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{4k^2 - 1}$$

zu berechnen.

Lösung.

(a) Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von f für drei Perioden:



(b) Die Funktion ist gerade, d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass $b_n = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und wir müssen nur die Koeffizienten der Cosinusreihe berechnen. Es ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\left[\cos(x)\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}(-1-1) = \frac{4}{\pi},$$

und, für $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx) f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)\sin(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(nx)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\cos(nx)\cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n(-\sin(nx))(-\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \cos(n\pi) + 1 - n\int_0^{\pi} \sin(nx)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cos(n\pi) + 1 - n\left[\sin(nx)\sin(x)\right]_0^{\pi} + n\int_0^{\pi} n\cos(nx)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cos(n\pi) + 1 + n^2\int_0^{\pi} \cos(nx)\sin(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

und daraus wiederum

$$\int_0^\pi \cos(nx)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos(n\pi)+1}{1-n^2}$$

falls $n > 1$ ist. Im Fall $n = 1$ ist

$$\int_0^\pi \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}(\sin(x))^2\right]_0^\pi = 0.$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)+1}{1-n^2} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{4}{\pi(1-4k^2)} & \text{falls } n = 2k. \end{cases}$$

Die Fourierreihe ist damit durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Fourier}_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(nx) \\ &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kx) \end{aligned}$$

gegeben.

(c) Mit $f(\pi/2) = 1$ und

$$\mathrm{Fourier}_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(k\pi) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{4(-1)^k}{4k^2-1}$$

erhalten wir

$$2 - \sum_{k=1}^\infty \frac{4(-1)^k}{4k^2-1} = \pi.$$

Hausaufgabe 32 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x \leqslant -1 \\ 2x & \text{für } -1 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } \quad 1 < x \leqslant \pi \,. \end{cases}$$

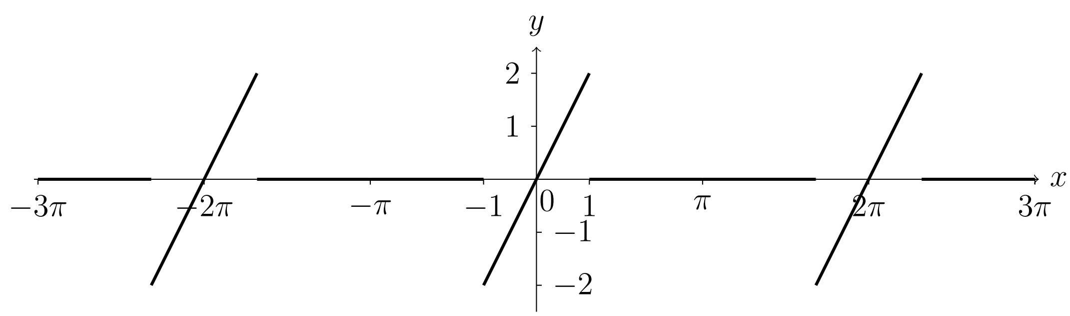
(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(c) Bestimmen Sie $\text{Fourier}_f(1)$.

Lösung.

(a) Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von f für drei Perioden:



(b) Die Funktion ist ungerade, d.h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass $a_n = 0$ ist für $n \geqslant 0$. Wie müssen also nur die Koeffizienten der Sinusreihe berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 2x \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\left[x \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\left[x \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^1 + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(-\frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2} \right). \end{aligned}$$

und damit

$$\text{Fourier}_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \left(-\frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2} \right) \sin(nx).$$

(c) Der Wert der Fourier-Reihe an den Stellen, an denen $f(x)$ unstetig ist, wird durch Mittelung des linksseitigen und des rechtsseitigen Grenzwerts von $f(x)$ erhalten. Also ist

$$\begin{aligned} \text{Fourier}_f(1) &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \to 1-0} f(x) + \lim_{x \to 1+0} f(x) \right) \\ &= \frac{1}{2}(2 - 0) = 1. \end{aligned}$$

Noch eine Bemerkung. Durch Einsetzen erhält man auch

$$\frac{\pi}{4} \;=\; \frac{\pi}{4}\cdot \mathrm{Fourier}_f(1) \;=\; \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\cos(n)}{n}+\frac{\sin(n)}{n^2}\right)\sin(n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos(n)}{n}+\frac{\sin(n)}{n^2}\right)\sin(n).$$

Diese Reihe wäre auf direktem Weg schwierig zu berechnen.

Hausaufgabe 33 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2} & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\[2ex] -\dfrac{x}{2} + \pi & \text{für } \quad 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

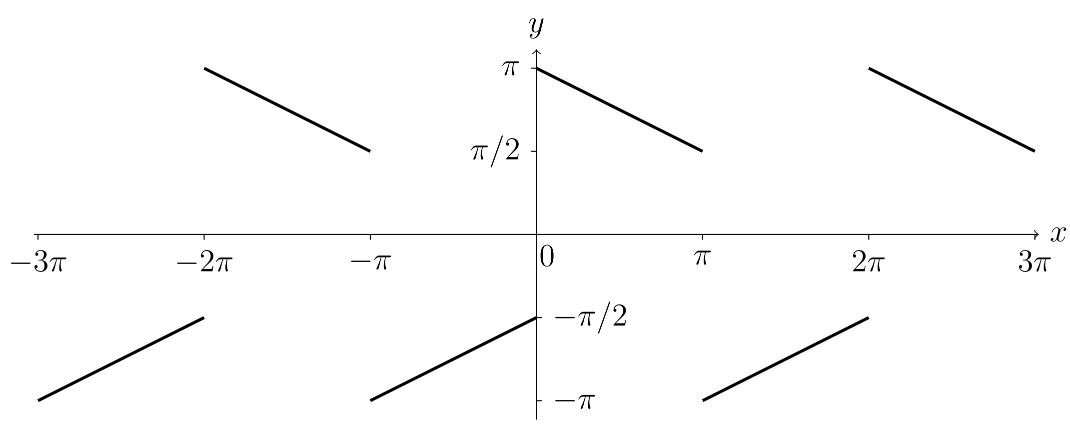
(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(c) Sei $u(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ für $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie den Graphen von $u(x)$.

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $u(x)$ unter Verwendung von (b).

Lösung.

(a) Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von f für drei Perioden:



(b) Im folgenden benötigen wir für $n \geqslant 1$ die Stammfunktionen

$$\int x \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \left[x \frac{\sin(nx)}{n}\right] - \int \frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x = \left[x \frac{\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]$$

und

$$\int x \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left[x \frac{-\cos(nx)}{n}\right] - \int \frac{-\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x = \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right].$$

Wir erhalten zunächst

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(-\frac{x}{2} + \pi\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} - \pi x\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2}{4} + \pi x\right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi^2}{2} - \pi^2\right) + \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi^2}{4} + \pi^2\right) = -\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = 0. \end{aligned}$$

Mit obiger Stammfunktion von $x\cos(nx)$ folgt

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\left(-\frac{x}{2}+\pi\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}+\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}+\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_{0}^{\pi} + \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi}.
\end{aligned}
$$

Alle Terme mit $\sin(nx)$ verschwinden dabei in $x=0$, in $x=-\pi$ und in $x=\pi$. Somit wird

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{\cos(-n\pi)}{n^2}\right) - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{\cos(n\pi)}{n^2}-\frac{\cos(n\pi)}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1-\cos(n\pi)}{\pi n^2}.
\end{aligned}
$$

Mit obiger Stammfunktion von $x\sin(nx)$ folgt

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\left(-\frac{x}{2}+\pi\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{0}^{\pi} + \left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi}.
\end{aligned}
$$

Wieder verschwinden alle Terme mit $\sin(nx)$ und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
b_n &= \cancel{-\frac{1}{2\pi}\left(\pi\frac{\cos(n\pi)}{n}\right)} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{\cos(-n\pi)}{n}\right) \cancel{- \frac{1}{2\pi}\left(-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n}\right)} + \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n}+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(n\pi)}{2}-\cos(n\pi)+1\right) \\
&= \frac{3}{2n}\left(1-\cos(n\pi)\right).
\end{aligned}
$$

Damit ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch

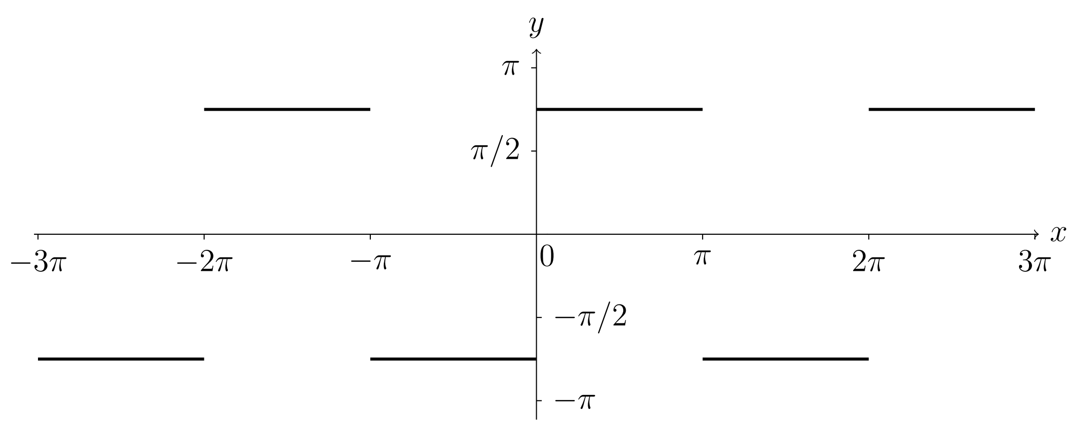
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Fourier}_f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(n\pi)}{\pi n^2}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos(n\pi))}{2n}\sin(nx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-(-1)^n)}{2n}\sin(nx) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{(2k+1)}\sin((2k+1)x).
\end{aligned}
$$

(c) Es ist $u(x)$ eine ungerade 2π-periodische Funktion, welche auf $[0, \pi]$ folgende Werte annimmt.

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(f(0) - f(0)) & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{für } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2}(f(\pi) - f(-\pi)) & \text{für } x = \pi \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}((-\frac{\pi}{2}) - (-\frac{\pi}{2})) & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{2}((-\frac{x}{2} + \pi) - (\frac{(-x)}{2} - \frac{\pi}{2})) & \text{für } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) & \text{für } x = \pi \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{3}{4}\pi & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = \pi \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dann ist $u(-x) = -u(x)$ für $x \in [-\pi, 0]$.
Schließlich ist $u(x + 2\pi) = u(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von u für drei Perioden:



Die Fourier-Reihe von $u(x)$ ist einfach die Sinusreihe der Fourier-Reihe von $f(x)$:

$$\text{Fourier}_u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{(2k+1)} \sin((2k+1)x) \ .$$