Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 12

Hausaufgabe 34 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{für } \quad 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{Fourier}_f(x)$.

(b) Sei $f_N(x)$ das N-te Fourier-Polynom von $f(x)$, für $N \geqslant 1$.

Bestimmen Sie $\|f - f_1\|^2$.

Bestimmen Sie $\|f - f_3\|^2$.

Schreiben Sie beide Resultate auch in Dezimaldarstellung mit 4 Nachkommastellen, unter Verwendung eines Taschenrechners.

Lösung.

(a) Für $x \in (0, \pi)$ ist $f(-x) = -f(x)$. Also ist $f(x)$ ungerade auf $[-\pi, +\pi]$, ausgenommen bei den einzelnen Stellen $-\pi$, 0, π, die aber bei der Bestimmung der Fourier-Koeffizienten keinen Einfluß haben.

Somit ist $a_j = 0$ für $j \geqslant 0$.

Wir berechnen b_j für $j \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} -\sin(jx) \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \sin(jx) \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\cos(jx)}{j} \right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\cos(jx)}{j} \right]_{0}^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{j\pi} \left(1 - (-1)^j \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } j \text{ gerade} \\ \frac{4}{j\pi} & \text{falls } j \text{ ungerade}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Fourier}_f(x) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{4}{j\pi} \sin(jx) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x)\,. \end{aligned}$$

(b) Das N-te Fourier-Polynom ist gegeben durch

$$f_N(x) = \sum_{j=1}^{N} b_j \sin(jx)\,,$$

da $a_j = 0$ ist für $j \geqslant 0$.

Daher haben wir

$$f_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin(x) \qquad \text{und} \qquad f_3(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3}\right).$$

Zu $\|f - f_1\|^2$.

Da $f(x) - f_1(x)$ ungerade ist, ist $(f(x) - f_1(x))^2$ gerade und also

$$\begin{aligned} \|f - f_1\|^2 &= 2\int_0^\pi (f(x) - f_1(x))^2 \,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\pi (1 - \tfrac{4}{\pi}\sin(x))^2 \,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\pi 1 - \tfrac{8}{\pi}\sin(x) + \tfrac{16}{\pi^2}\sin(x)^2 \,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Mit Euler-de-Moivre wird

$$\sin(x)^2 = \left(\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right)^2 = -\tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) = -\tfrac{1}{4}(2\cos(2x) - 2) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)\,.$$

Oder aber, man folgert aus

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = (1 - \sin(x)^2) - \sin(x)^2 = 1 - 2\sin(x)^2\,,$$

daß $\sin(x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ ist.

Jedenfalls fahren wir fort mit

$$\begin{aligned} & 2\int_0^\pi 1 - \tfrac{8}{\pi}\sin(x) + \tfrac{16}{\pi^2}\sin(x)^2 \,\mathrm{d}x \\ = \ & 2\int_0^\pi 1 - \tfrac{8}{\pi}\sin(x) + \tfrac{16}{\pi^2}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)) \,\mathrm{d}x \\ = \ & 2\left[x + \tfrac{8}{\pi}\cos(x) + \tfrac{16}{\pi^2}(\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{4}\sin(2x))\right]_0^\pi \\ = \ & 2(\pi - \tfrac{16}{\pi} + \tfrac{16}{\pi^2}\tfrac{\pi}{2}) \\ = \ & 2\pi - \tfrac{16}{\pi} \\ \approx \ & 1{,}1902\,. \end{aligned}$$

Zu $\|f - f_3\|^2$.

Wir merken zunächst an: $(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.

Da $f(x)-f_3(x)$ ungerade ist, ist $(f(x)-f_3(x))^2$ gerade und also

$$\begin{aligned}
& \|f-f_3\|^2 \\
= \;& 2\int_0^\pi (f(x)-f_3(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
= \;& 2\int_0^\pi (1-\tfrac{4}{\pi}\sin(x)-\tfrac{4}{3\pi}\sin(3x))^2 \,\mathrm{d}x \\
= \;& 2\int_0^\pi 1+\tfrac{16}{\pi^2}\sin(x)^2+\tfrac{16}{9\pi^2}\sin(3x)^2-\tfrac{8}{\pi}\sin(x)-\tfrac{8}{3\pi}\sin(3x)+\tfrac{32}{3\pi^2}\sin(x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x\;.
\end{aligned}$$

Oben haben wir schon gesehen: $\sin(x)^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$.

Also ist auch $\sin(3x)^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(6x)$.

Mit Euler-de-Moivre wird noch

$$\begin{aligned}
\sin(x)\sin(3x) &= \left(\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right)\left(\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x})\right) \\
&= -\tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}) \\
&= -\tfrac{1}{4}(2\cos(4x)-2\cos(2x)) \\
&= -\tfrac{1}{2}\cos(4x)+\tfrac{1}{2}\cos(2x)\;.
\end{aligned}$$

Wir setzen fort:

$$\begin{aligned}
= \;& 2\int_0^\pi 1+\tfrac{16}{\pi^2}\sin(x)^2+\tfrac{16}{9\pi^2}\sin(3x)^2-\tfrac{8}{\pi}\sin(x)-\tfrac{8}{3\pi}\sin(3x)+\tfrac{32}{3\pi^2}\sin(x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
= \;& 2\int_0^\pi 1+\tfrac{16}{\pi^2}(\tfrac{1}{2}-\cos(2x))+\tfrac{16}{9\pi^2}(\tfrac{1}{2}-\cos(6x)) \\
& \quad -\tfrac{8}{\pi}\sin(x)-\tfrac{8}{3\pi}\sin(3x)+\tfrac{32}{3\pi^2}(-\tfrac{1}{2}\cos(4x)+\tfrac{1}{2}\cos(2x))\,\mathrm{d}x \\
= \;& 2\big[x+\tfrac{16}{\pi^2}(\tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{2}\sin(2x))+\tfrac{16}{9\pi^2}(\tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{6}\sin(6x)) \\
& \quad +\tfrac{8}{\pi}\cos(x)+\tfrac{8}{9\pi}\cos(3x)+\tfrac{32}{3\pi^2}(-\tfrac{1}{8}\sin(4x)+\tfrac{1}{4}\sin(2x)\big]_0^\pi \\
= \;& 2\big(\pi+\tfrac{16}{\pi^2}\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{16}{9\pi^2}\tfrac{\pi}{2} \\
& \quad -\tfrac{16}{\pi}-\tfrac{16}{9\pi}\big) \\
= \;& 2\pi+\tfrac{2}{\pi}(8+\tfrac{8}{9}-16-\tfrac{16}{9}) \\
= \;& 2\pi-\tfrac{160}{9\pi} \\
\approx \;& 0{,}6243\;.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 35

(a) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus Hausaufgabe 34, um

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

zu berechnen.

(b) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus Hausaufgabe 31, um

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

zu berechnen.

Lösung. Die Parsevalsche Gleichung lautet allgemein

$$\|f\|^2 = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j^2 + b_j^2\right).$$

(a) Für die Funktion $f(x)$ aus Hausaufgabe 34 wird

$$\|f\|^2 \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} 1 \,\mathrm{d}x \;=\; 2\pi\,.$$

Aus Hausaufgabe 34 wissen wir $b_j = \frac{2}{j\pi}(1-(-1)^j)$ für $j \geqslant 1$.

Damit wird

$$\begin{aligned}
\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j^2 + b_j^2\right) \;&=\; \pi \sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 \\
&=\; \pi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 j^2} \left(1-(-1)^j\right)^2 \\
&=\; \frac{4}{\pi} \left(\frac{4}{1^2} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{5^2} + \ldots \right) \\
&=\; \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \;=\; \frac{\pi}{16}\|f\|^2 \;=\; \frac{\pi}{16}\cdot 2\pi \;=\; \frac{\pi^2}{8}\,.$$

(b) Für die Funktion $f(x)$ aus Hausaufgabe 31 wird, unter Verwendung von $\sin(x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ (vgl. Lösung zu Hausaufgabe 34.(b)),

$$\|f\|^2 \;=\; 2\int_0^\pi \sin(x)^2\,\mathrm{d}x \;=\; 2\int_0^\pi \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{d}x \;=\; 2\left[\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^\pi \;=\; \pi\;.$$

Aus Hausaufgabe 31 kennen wir die Fourier-Reihe

$$\mathrm{Fourier}_f(x) \;=\; \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kx)\;.$$

Hierbei steht vor $\cos(2kx)$ der Koeffizient $a_{2k} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}$. Ferner ist $a_0 = \frac{4}{\pi}$. Alle anderen Fourier-Koeffizienten sind gleich 0.

Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{j=1}^\infty \left(a_j^2 + b_j^2\right) \;&=\; \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^\infty a_{2k}^2 \\ &=\; \frac{\pi}{2}\cdot\frac{16}{\pi^2} + \pi\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\right)^2 \\ &=\; \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(4k^2-1)^2}\;.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(4k^2-1)^2} \;=\; \frac{\pi}{16}\left(\|f\|^2 - \frac{8}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\,.$$

Hausaufgabe 36 Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 - tx & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\ 1 + tx & \text{für } \quad 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe $\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$.

(b) Sei nun $t = 0$. Bestätigen Sie durch Vergleich mit Hausaufgabe 34, dass die Koeffizienten c_k von $\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ mit den Koeffizienten a_k, b_k von $\mathrm{Fourier}_f(x)$ in folgender Beziehung stehen.

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geqslant 1.$$

Lösung.

(a) Die komplexe Fourier-Reihe ist gegeben durch

$$\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x.$$

Für $k = 0$ wird

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-1 - tx) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} (1 + tx) \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left([-x]_{-\pi}^{0} - t \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{0} + [x]_0^{\pi} + t \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(t\frac{\pi^2}{2} + t\frac{\pi^2}{2} \right) \\ &= \frac{t\pi}{2} \, . \end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-1 - tx)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} (1 + tx)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x - t \int_{-\pi}^{0} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x + t \int_{0}^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\mathrm{i}k} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\mathrm{i}k} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_{0}^{\pi} - t \left(- \left[\frac{x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{\mathrm{i}k}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\mathrm{i}k} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \right) \right. \\
&\qquad \left. + t \left(- \left[\frac{x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{\mathrm{i}k}\right]_{0}^{\pi} + \frac{1}{\mathrm{i}k} \int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\mathrm{i}k} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}\right) - \frac{1}{\mathrm{i}k} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} - 1\right) - t \left(-\frac{\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}}{\mathrm{i}k} - \frac{1}{(\mathrm{i}k)^2} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_{-\pi}^{0} \right) \right. \\
&\qquad \left. + t \left(-\frac{\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}}{\mathrm{i}k} - \frac{1}{(\mathrm{i}k)^2} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_{0}^{\pi} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{\mathrm{i}k} \left(1 - (-1)^k\right) - t \left(-\frac{\pi(-1)^k}{\mathrm{i}k} + \frac{1}{k^2} \left(1 - (-1)^k\right) \right) + t \left(-\frac{\pi(-1)^k}{\mathrm{i}k} + \frac{1}{k^2} \left((-1)^k - 1\right) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{\mathrm{i}k} \left(1 - (-1)^k\right) + \frac{2t}{k^2} \left((-1)^k - 1\right) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\mathrm{i}}{k} - \frac{t}{k^2} \right) \left(1 - (-1)^k\right),
\end{aligned}$$

wobei wir $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} = (-1)^k$ verwendet haben.

Somit wird

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x) &= \frac{t\pi}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\mathrm{i}}{k} - \frac{t}{k^2} \right) \left(1 - (-1)^k\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \\
&= \frac{t\pi}{2} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\mathrm{i}}{(2j+1)} - \frac{t}{(2j+1)^2} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2j+1)x} .
\end{aligned}$$

(b) Für $t = 0$ erhalten wir die komplexe Fourier-Reihe

$$\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\pi \mathrm{i} k} \left(1 - (-1)^k\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi \mathrm{i}(2j+1)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2j+1)x}$$

mit den Koeffizienten

$$c_0 = 0 \quad \text{und} \quad c_k = \frac{1}{\mathrm{i}k\pi} \left(1 - (-1)^k\right)$$

für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Aus Hausaufgabe 34 kennen wir die Koeffizienten der Fourier-Reihe $\text{Fourier}_f(x)$:

$$a_j \;=\; 0$$

für $j \geqslant 0$ und

$$b_j \;=\; \frac{2}{j\pi}\left(1-(-1)^j\right)$$

für $j \geqslant 1$.

Wir führen den Vergleich der Koeffizienten durch.

Man erhält

$$0 \;=\; 2c_0 \;=\; a_0 \;=\; 0\,.$$

Für $k \geqslant 1$ erhält man

$$c_k + c_{-k} \;=\; \frac{1}{\mathrm{i}k\pi}\left(1-(-1)^k\right) + \frac{1}{(-\mathrm{i}k\pi)}\left(1-(-1)^{-k}\right) \;=\; 0 \;=\; a_k\,,$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\,(c_k - c_{-k}) \;&=\; \mathrm{i}\left(\frac{1}{\mathrm{i}k\pi}\left(1-(-1)^k\right) - \frac{1}{(-\mathrm{i}k\pi)}\left(1-(-1)^{-k}\right)\right)\\
&=\; \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)\\
&=\; b_k\,.
\end{aligned}$$

Dies bestätigt die gefragten Beziehungen.