Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 13

Hausaufgabe 37 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die ungerade periodische Funktion mit Periode 1, die für $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ gegeben ist durch

$$f(x) \ = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < x \leqslant \frac{1}{4} \\ 0 & \text{falls } \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

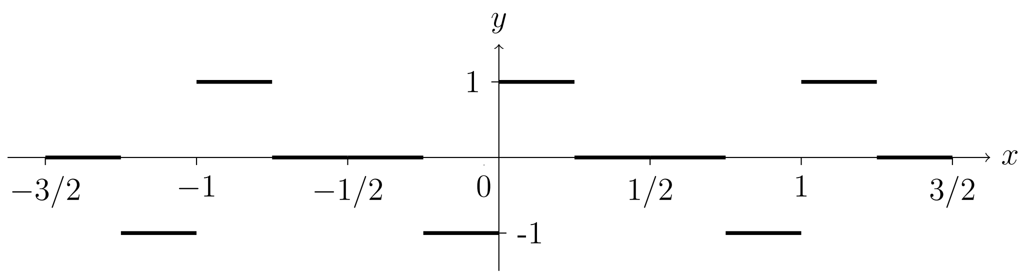
(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

(b) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe von $f(x)$.

(c) Verwenden Sie (b) und den Zusammenhang $b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$, um die Fourier-Reihe von $f(x)$ zu bestimmen.

Lösung.

(a) Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von f für drei Perioden:



(b) Die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier-Reihe werden für $k \neq 0$ wie folgt berechnet.

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{T}x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1/4}^{0} (-1)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1/4} 1\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{-\mathrm{i}k2\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi x}\right]_{-1/4}^{0} + \frac{1}{-\mathrm{i}k2\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi x}\right]_{0}^{1/4} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{k2\pi}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{\mathrm{i}}{k2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}} - 1\right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi k}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}} - 2\right) \end{aligned}$$

Den Fall $k = 0$ müssen wir separat behandeln:

$$c_0 = \int_{-1/4}^{0} (-1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1/4} 1\,\mathrm{d}x = 0.$$

Daraus erhalten wir für die komplexe Fourier-Reihe

$$\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{2k\pi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}} - 2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi x}.$$

Mit Euler-de-Moivre können wir dies umschreiben zu

$$\mathrm{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x) = \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{k\pi}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi x}.$$

(c) Da die Funktion $f(x)$ ungerade ist, ist ihre Fourier-Reihe eine reine Sinusreihe. Für die Koeffizienten b_k erhalten wir

$$\begin{aligned}
b_k &= \mathrm{i}(c_k - c_{-k})\\
&= \frac{\mathrm{i}^2}{k\pi}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) - \frac{\mathrm{i}^2}{-k\pi}\left(\cos\left(-k\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)\\
&= -\frac{1}{k\pi}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) - \frac{1}{k\pi}\left(\cos\left(-k\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)\\
&= \frac{2}{k\pi}\left(1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{Fourier}_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left(1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin(k2\pi x).$$

Dies kann noch umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fourier}_f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\sin(k2\pi x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\sin(k2\pi x)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\sin(k2\pi x) - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{2\ell\pi}\cos\left(2\ell\frac{\pi}{2}\right)\sin(4\ell\pi x)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\sin(k2\pi x) - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell\pi}\sin(4\ell\pi x).
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 38

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung $xu_x + yu_y = 5u$.

Sei $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto w(t)$ eine beliebig gewählte differenzierbare Funktion.

Verifizieren Sie, dass $u(x,y) = w\left(\frac{y}{x}\right) \cdot x^5$ eine Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ist.

(b) Wir betrachten die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Gesucht sind zweimal differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(y)$, definiert auf $\mathbb{R}$, für welche

$$u(x,y) \;=\; f(x) \cdot g(y)$$

eine Lösung der Laplace-Gleichung ist, die $u(x,0) = \mathrm{e}^x$ erfüllt für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung.

(a) Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Funktion u.

Es ist

$$\begin{aligned} u_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= w'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial \left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} \cdot x^5 + w\left(\frac{y}{x}\right) \cdot 5x^4 \\ &= -w'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x^2} \cdot x^5 + 5w\left(\frac{y}{x}\right) \cdot x^4 \\ &= -w'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot y \cdot x^3 + 5w\left(\frac{y}{x}\right) \cdot x^4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_y = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= w'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial \left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y} \cdot x^5 \\ &= w'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \cdot x^5 = w'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot x^4 . \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert schließlich

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y - 5u &= \left(\cancel{-w'\left(\tfrac{y}{x}\right) \cdot y \cdot x^4} + 5w\left(\tfrac{y}{x}\right) \cdot x^5\right) + \cancel{w'\left(\tfrac{y}{x}\right) \cdot yx^4} - 5w\left(\tfrac{y}{x}\right) \cdot x^5 \\ &= 5w\left(\tfrac{y}{x}\right) \cdot x^5 - 5w\left(\tfrac{y}{x}\right) \cdot x^5 \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

(b) Es soll $f(x) \cdot g(0) = u(x,0) = \mathrm{e}^x$ sein.

Also gibt es ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $g(0) = a$ und

$$f(x) \;=\; \tfrac{1}{a}\mathrm{e}^x \,.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen von $u(x,y) = f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot \frac{1}{a}\mathrm{e}^x$ und erhalten

$$u_{xx} = g(y) \cdot f''(x) = g(y) \cdot \frac{1}{a}\mathrm{e}^x, \qquad u_{yy} = f(x) \cdot g''(y) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^x \cdot g''(y).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert dann

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -u_{yy} \\ g(y) \cdot \frac{1}{a}\mathrm{e}^x &= -\frac{1}{a}\mathrm{e}^x \cdot g''(y) \\ g(y) &= -g''(y). \end{aligned}$$

Wir suchen also eine Funktion $g(y)$ mit $g(0) = a$ und $g(y) = -g''(y)$.

Jede solche Funktion ist gegeben durch

$$g(y) \;=\; a\cos(y) + b\sin(y)$$

für ein $b \in \mathbb{R}$.

Damit ist dann auch

$$\begin{aligned} u(x,y) &= g(y) \cdot f(x) \\ &= (a\cos(y) + b\sin(y))\frac{1}{a}\mathrm{e}^x \\ &= \cos(y)\mathrm{e}^x + \frac{b}{a}\sin(y)\mathrm{e}^x\ . \end{aligned}$$

Hausaufgabe 39 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_{xx} = 2u_t \ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) \ = \ f(x) \ = \ \left\{ \begin{array}{cl} x & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ -x+1 & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{array} \right\} \qquad \text{für } x \in [0,1].$$

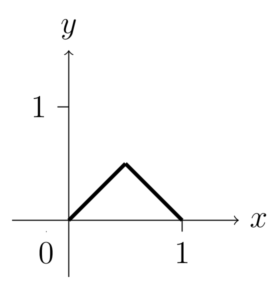
(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe der ungeraden Fortsetzung von $f(x)$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

Lösung.

(a) Das folgende Schaubild zeigt den Graphen von f



(b) Die Fourierkoeffizienten b_n der ungeraden 2-periodischen Fortsetzung von f sind für $n \geqslant 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{1/2} x\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x + 2\int_{1/2}^1 (-x+1)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{1/2} x\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x - 2\int_{1/2}^1 x\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x + 2\int_{1/2}^1 \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x \ . \end{aligned}$$

Mit

$$\int x\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}\right] + \frac{1}{n\pi}\int \cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]$$

erhalten wir daraus

$$
\begin{aligned}
b_n = \; & 2\left[-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}+\frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^{1/2} - 2\left[-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}+\frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_{1/2}^{1} - 2\left[\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{1/2}^{1} \\
= \; & 2\left(-\cancel{\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi}}+\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\right) - 2\left(-\cancel{\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}}+\frac{\sin(n\pi)}{n^2\pi^2}+\cancel{\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi}}-\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\right) \\
& - 2\left(\cancel{\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}}-\cancel{\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi}}\right) \\
= \; & 4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}
$$

D.h. die Fourier-Reihe ist gegeben durch

$$
\mathrm{Fourier}_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x).
$$

(c) Um $u(x,t)$ zu finden, verwenden wir die Formel in 8.2.6 mit $a^2 = \frac{1}{2}$, $L = 1$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}t} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t}.
\end{aligned}
$$