Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 14

Hausaufgabe 40 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; u_{xx} + t + x\ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0 \quad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 0 \quad \text{für } x \in [0,3]\ .$$

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{b}_n(t)$ für die ungerade 6-periodische Fortsetzung in x-Richtung von $r(x,t) = t + x$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der angegebenen Wärmeleitungsgleichung unter den angegebenen Rand- und Anfangsbedingungen.

Lösung.

(a) Die Fourier-Koeffizienten $\tilde{b}_n(t)$ sind gegeben durch

$$\tilde{b}_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L r(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Hier ist $r(x,t) = t + x$ und $L = 3$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_n(t) &= \frac{2}{3}\int_0^3 (t+x)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\left(\left[-(t+x)\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_{x=0}^{x=3} + \frac{3}{n\pi}\int_0^3 \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\left[-(t+x)\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_{x=0}^{x=3} + \left(\frac{3}{n\pi}\right)^2\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_{x=0}^{x=3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\left((3+t)\cos(n\pi) - t\cos(0)\right) + \frac{9}{n^2\pi^2}\left(\sin(n\pi) - \sin(0)\right)\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left((3+t)(-1)^n - t\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(t - (3+t)(-1)^n\right)\ .
\end{aligned}$$

(b) Zur Berechnung von $u(x,t)$ müssen wir die Fourier-Koeffizienten $b_n(t)$ berechnen, die wir durch Integration von

$$b_n'(t) = \tilde{b}_n(t)\mathrm{e}^{\frac{a^2n^2\pi^2 t}{L^2}}$$

erhalten. Hier ist $a^2 = 1$.

Es folgt

$$\begin{aligned}
b_n(t) &= \int \tilde{b}_n(t) \mathrm{e}^{\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{n\pi} \int \left(t - (3+t)(-1)^n\right) \mathrm{e}^{\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(\left[\left(t - (3+t)(-1)^n\right) \frac{9}{n^2\pi^2} \mathrm{e}^{\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \right] - \int \left(1 - (-1)^n\right) \frac{9}{n^2\pi^2} \mathrm{e}^{\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(\left[\left(t - (3+t)(-1)^n\right) \frac{9}{n^2\pi^2} \mathrm{e}^{\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \right] - \left(1 - (-1)^n\right) \left(\frac{9}{n^2\pi^2} \right)^2 \left[\mathrm{e}^{\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \right] \right) \\
&= \frac{18}{n^3\pi^3} \left[\left(\left(t - (3+t)(-1)^n\right) - \left(1 - (-1)^n\right) \cdot \frac{9}{n^2\pi^2} \right) \mathrm{e}^{\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \right] \\
&= \frac{18}{n^3\pi^3} \left(\left(t - (3+t)(-1)^n\right) - \left(1 - (-1)^n\right) \cdot \frac{9}{n^2\pi^2} \right) \mathrm{e}^{\frac{n^2\pi^2 t}{9}} + \beta_n \, ,
\end{aligned}$$

mit der Integrationskonstanten $\beta_n \in \mathbb{R}$.

Gemäß Ansatz soll nun sein:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{18}{n^3\pi^3} \left(\left(t - (3+t)(-1)^n\right) - \left(1 - (-1)^n\right) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) \mathrm{e}^{\frac{n^2\pi^2 t}{9}} + \beta_n \right) \sin\left(\tfrac{n\pi x}{3}\right) \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \, .
\end{aligned}$$

Wir bestimmen β_n durch Einsetzen der Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$.

Da die Fourier-Koeffizienten der ungeraden 6-periodischen Fortsetzung der Nullfunktion alle gleich 0 sind, sollten auch die Fourierkoeffizienten $b_n(0)$ der ungeraden 6-periodischen Fortsetzung der Funktion $u(x,0)$ alle gleich 0 sein. Also soll gelten:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} b_n(0) \\
&= \tfrac{18}{n^3\pi^3} \left(\left(0 - 3 \cdot (-1)^n\right) - \left(1 - (-1)^n\right) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) \mathrm{e}^0 + \beta_n \\
&= -\tfrac{18}{n^3\pi^3} \left((-1)^n \cdot 3 + \left(1 - (-1)^n\right) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) + \beta_n \, .
\end{aligned}$$

Und somit ist

$$\beta_n = \tfrac{18}{n^3\pi^3} \left((-1)^n \cdot 3 + \left(1 - (-1)^n\right) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) \, .$$

Die Lösung ist nun gegeben durch

$$
\begin{aligned}
& u(x,t) \\
= \; & \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \\
= \; & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{18}{n^3\pi^3} \left((t-(3+t)(-1)^n) - (1-(-1)^n) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) \mathrm{e}^{\frac{n^2\pi^2 t}{9}} + \beta_n \right) \sin\left(\tfrac{n\pi x}{3}\right) \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \\
= \; & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{18}{n^3\pi^3} \left((t-(3+t)(-1)^n) - (1-(-1)^n) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) \mathrm{e}^{\frac{n^2\pi^2 t}{9}} + \tfrac{18}{n^3\pi^3} \left((-1)^n \cdot 3 + (1-(-1)^n) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) \right) \\
& \qquad \cdot \sin\left(\tfrac{n\pi x}{3}\right) \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \\
= \; & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left((t-(3+t)(-1)^n) - (1-(-1)^n) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) + \left((-1)^n \cdot 3 + (1-(-1)^n) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \right) \\
& \qquad \cdot \tfrac{18}{n^3\pi^3} \sin\left(\tfrac{n\pi x}{3}\right) \; .
\end{aligned}
$$

Hausaufgabe 41 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; u_{xx} + \tfrac{4}{3}x + 3t - \tfrac{2}{3}tx\;,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = t^2, \quad u(3,t) = 1 + t \quad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \tfrac{1}{3}x \quad \text{für } x \in [0,3]\;.$$

(a) Reduzieren Sie das Problem mit inhomogenen Randbedingungen für $u(x,t)$ auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen für $\tilde{u}(x,t)$ wie in 8.2.11.

(b) Geben Sie eine Lösung für $\tilde{u}(x,t)$ an unter Verwendung von Hausaufgabe 40.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung für $u(x,t)$ unter Verwendung von (b).

Lösung.

(a) Um das Problem zu reduzieren, setzen wir

$$\tilde{r}(x,t) = r(x,t) - \left(1 - \frac{x}{L}\right) g'(t) - \frac{x}{L} h'(t),$$

wobei

$$r(x,t) = \tfrac{4}{3}x + 3t - \tfrac{2}{3}tx\,, \quad L = 3, \quad g(t) = t^2 \quad \text{und} \quad h(t) = 1 + t\,.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \tilde{r}(x,t) &= \tfrac{4}{3}x + 3t - \tfrac{2}{3}tx - \left(1 - \tfrac{x}{3}\right) 2t - \tfrac{x}{3} \\ &= \tfrac{4}{3}x + 3t - \tfrac{2}{3}tx - 2t + \tfrac{2}{3}tx - \tfrac{x}{3} \\ &= x + t. \end{aligned}$$

Für die Randbedingung gilt nun

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f(x) - \left(1 - \frac{x}{L}\right) g(0) - \frac{x}{L} h(0) \\ &= \tfrac{x}{3} - \left(1 - \tfrac{x}{3}\right) 0 - \tfrac{x}{3} 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das reduzierte Problem lautet also

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} + x + t,$$

mit

$$\tilde{u}(0,t) = 0, \quad \tilde{u}(3,t) = 0 \quad \text{für } t \geqslant 0,$$

und

$$\tilde{u}(x,0) = 0, \quad \text{für } x \in [0,3].$$

(b) Die Lösung der Aufgabe in (a) stimmt mit der aus Hausaufgabe 40 überein.

Daher ist

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}(x,t) \\
=\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left((t-(3+t)(-1)^n) - (1-(-1)^n) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) + \left((-1)^n \cdot 3 + (1-(-1)^n) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \right) \\
&\quad \cdot \tfrac{18}{n^3\pi^3} \sin\left(\tfrac{n\pi x}{3}\right) \ .
\end{aligned}
$$

(c) Die Lösung des ursprünglichen Problems ist gegeben durch

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + \left(1 - \frac{x}{L}\right) g(t) + \frac{x}{L} h(t).$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) \\
=\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left((t-(3+t)(-1)^n) - (1-(-1)^n) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) + \left((-1)^n \cdot 3 + (1-(-1)^n) \cdot \tfrac{9}{n^2\pi^2} \right) \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 t}{9}} \right) \\
&\quad \cdot \tfrac{18}{n^3\pi^3} \sin\left(\tfrac{n\pi x}{3}\right) + (1 - \tfrac{x}{3}) t^2 + \tfrac{x}{3}(1+t) \ .
\end{aligned}
$$

Hausaufgabe 42 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} \;=\; 9u_{xx}\;,$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = x\sin(x), \quad u_t(x,0) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\;.$$

(a) Berechnen Sie die Lösung der Wellengleichung unter den gegebenen Anfangsbedingungen.

(b) Überprüfen Sie durch eine direkte Rechnung, ob die in (a) berechnete Lösung $u(x,t)$ die partielle Differentialgleichung $u_{tt} = 9u_{xx}$ und die gegebenen Anfangsbedingungen erfüllt.

Lösung.

(a) Die Lösung ist mit der d'Alembertschen Formel gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s,$$

wobei

$$c = 3\,,\;\; f(x) = x\sin(x) \quad \text{und} \quad g(x) = x\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left((x-3t)\sin(x-3t) + (x+3t)\sin(x+3t)\right) + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} s\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\left((x-3t)\sin(x-3t) + (x+3t)\sin(x+3t)\right) + \frac{1}{12}\left[s^2\right]_{x-3t}^{x+3t} \\ &= \frac{1}{2}\left((x-3t)\sin(x-3t) + (x+3t)\sin(x+3t)\right) + \frac{1}{12}\left((x+3t)^2 - (x-3t)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((x-3t)\sin(x-3t) + (x+3t)\sin(x+3t)\right) + xt\;. \end{aligned}$$

(b) Um zu überprüfen, ob $u(x,t)$ die gesuchte Lösung ist, führen wir zunächst die zwei Funktionen

$$\alpha = \alpha(x,t) = x - 3t, \quad \beta = \beta(x,t) = x + 3t$$

ein. Dann ist

$$\alpha_t = -3\,,\;\; \alpha_x = 1\,,\;\; \beta_t = 3 \quad \text{und} \quad \beta_x = 1\,.$$

Wir haben

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\alpha\sin(\alpha) + \beta\sin(\beta)\right) + \frac{1}{12}\left(\beta^2 - \alpha^2\right).$$

Die ersten Ableitungen sind nun gegeben durch

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\alpha_t\sin(\alpha) + \alpha\cos(\alpha)\alpha_t + \beta_t\sin(\beta) + \beta\cos(\beta)\beta_t\right) + \frac{1}{6}\left(\beta\beta_t - \alpha\alpha_t\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(-\sin(\alpha) - \alpha\cos(\alpha) + \sin(\beta) + \beta\cos(\beta)\right) + \frac{1}{2}(\beta + \alpha) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\alpha_x \sin(\alpha) + \alpha\cos(\alpha)\alpha_x + \beta_x \sin(\beta) + \beta\cos(\beta)\beta_x\right) + \frac{1}{6}\left(\beta\beta_x - \alpha\alpha_x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha) + \alpha\cos(\alpha) + \sin(\beta) + \beta\cos(\beta)\right) + \frac{1}{6}(\beta - \alpha)\,. \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= \frac{3}{2}\left(-\cos(\alpha)\alpha_t - \alpha_t\cos(\alpha) + \alpha\sin(\alpha)\alpha_t + \cos(\beta)\beta_t + \beta_t\cos(\beta) - \beta\sin(\beta)\beta_t\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\beta_t + \alpha_t) \\ &= \frac{9}{2}\left(2\cos(\alpha) - \alpha\sin(\alpha) + 2\cos(\beta) - \beta\sin(\beta)\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha)\alpha_x + \alpha_x\cos(\alpha) - \alpha\sin(\alpha)\alpha_x + \cos(\beta)\beta_x + \beta_x\cos(\beta) - \beta\sin(\beta)\beta_x\right) \\ &\quad + \frac{1}{6}(\beta_x - \alpha_x) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\cos(\alpha) - \alpha\sin(\alpha) + 2\cos(\beta) - \beta\sin(\beta)\right)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt $u_{tt} = 9u_{xx}$.

Wir überprüfen noch die Anfangsbedingungen. Wir haben

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{2}\left(x\sin(x) + x\sin(x)\right) + \frac{1}{12}\left(x^2 - x^2\right) \\ &= x\sin(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= \frac{3}{2}\left(-\sin(x) - x\cos(x) + \sin(x) + x\cos(x)\right) + x \\ &= x\,. \end{aligned}$$

Also erfüllt $u(t,x)$ also die partielle Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen.