Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Lösung 15

Hausaufgabe 43 Sei $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$.

(a) Man verifiziere: Es ist
$$u(x,y) \;=\; \ln\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big)$$
eine Lösung der Potentialgleichung $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$ auf D.

(b) Sei $u(x,y)$ eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktion auf D.
Sei $w(r,\varphi) := u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.
Man überprüfe unter Verwendung der Kettenregel für Funktionen zweier Veränderlicher:
$$w_\varphi(r,\varphi) \;=\; u_x(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot (-r\sin(\varphi)) + u_y(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot r\cos(\varphi).$$
Man berechne $w_r(r,\varphi)$, $w_{rr}(r,\varphi)$ und $w_{\varphi\varphi}(r,\varphi)$.
Man überprüfe:
$$w_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r} w_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \;=\; u_{xx}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) + u_{yy}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\ .$$
Man bestätige: Es ist $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$ auf D genau dann, wenn
$$(*) \qquad w_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r} w_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \;=\; 0$$
ist für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(c) Man verifiziere durch eine direkte Rechnung, dass
$$w(r,\varphi) \;=\; \ln(r)$$
eine Lösung der partiellen Differentialgleichung $(*)$ ist.
Verifizieren Sie dies erneut unter Verwendung von (a) und (b).

Lösung.

(a) Wir berechnen die partiellen Ableitungen
$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} 2x = \frac{x}{x^2+y^2}\ , \\
u_{xx} &= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ , \\
u_y &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} 2y = \frac{y}{x^2+y^2}\ , \\
u_{yy} &= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ .
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2}$$

rechnen. Analog für u_y .

Wir setzen die partiellen Ableitungen in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$u_{xx} + u_{yy} \ = \ \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \ .$$

(b) Die Ableitungen erhält man durch Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} w_\varphi(r,\varphi) &= u_x(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot \frac{\partial(r\cos(\varphi))}{\partial\varphi} + u_y(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot \frac{\partial(r\sin(\varphi))}{\partial\varphi} \\ &= u_x(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot (-r\sin(\varphi)) + u_y(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot r\cos(\varphi) \ . \end{aligned}$$

Wir berechnen die verbleibenden partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} w_r(r,\varphi) &= u_x(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) + u_y(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot \sin(\varphi), \\ w_{rr}(r,\varphi) &= \cos(\varphi) \cdot (u_{xx}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) + u_{xy}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot \sin(\varphi)) \\ &\quad + \sin(\varphi) \cdot (u_{yx}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) + u_{yy}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot \sin(\varphi)) \ . \end{aligned}$$

Wir verwenden eine kürzere Schreibweise, indem wir das Argument (r,φ) resp. $(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ nicht überall dazuschreiben:

$$\begin{aligned} w_{rr} &= \cos(\varphi) \cdot (u_{xx} \cdot \cos(\varphi) + u_{xy} \cdot \sin(\varphi)) + \sin(\varphi) \cdot (u_{yx} \cdot \cos(\varphi) + u_{yy} \cdot \sin(\varphi)) \\ &= u_{xx} \cdot \cos(\varphi)^2 + u_{xy} \cdot 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + u_{yy} \cdot \sin(\varphi)^2 \ . \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} w_{\varphi\varphi} &= -r\cos(\varphi) \cdot u_x - r\sin(\varphi) \cdot (u_{xx} \cdot (-r\sin(\varphi)) + u_{xy} \cdot r\cos(\varphi)) \\ &\quad - r\sin(\varphi) \cdot u_y + r\cos(\varphi) \cdot (u_{yx} \cdot (-r\sin(\varphi)) + u_{yy} \cdot r\cos(\varphi)) \\ &= -r\cos(\varphi) \cdot u_x - r\sin(\varphi) \cdot u_y + r^2\sin(\varphi)^2 \cdot u_{xx} - 2r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \cdot u_{xy} + r^2\cos(\varphi)^2 \cdot u_{yy} \ . \end{aligned}$$

Alles in allem also:

$$\begin{aligned} w_r \quad &= \quad u_x \cdot \cos(\varphi) + u_y \cdot \sin(\varphi) \\ w_{rr} \quad &= \quad u_{xx} \cdot \cos(\varphi)^2 + u_{xy} \cdot 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + u_{yy} \cdot \sin(\varphi)^2 \\ w_{\varphi\varphi} \quad &= \quad -r\cos(\varphi) \cdot u_x - r\sin(\varphi) \cdot u_y + r^2\sin(\varphi)^2 \cdot u_{xx} - 2r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \cdot u_{xy} + r^2\cos(\varphi)^2 \cdot u_{yy} \ . \end{aligned}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}
& w_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r} w_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \\
= \; & w_{rr} + \tfrac{1}{r} w_r + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi} \\
= \; & u_{xx} \cdot \cos(\varphi)^2 + 2u_{xy} \cdot \sin(\varphi)\cos(\varphi) + u_{yy} \cdot \sin(\varphi)^2 \\
& + \tfrac{1}{r}\left(u_x \cdot \cos(\varphi) + u_y \cdot \sin(\varphi)\right) \\
& + \tfrac{1}{r^2}\left(-r\cos(\varphi) \cdot u_x - r\sin(\varphi) \cdot u_y + r^2 \sin(\varphi)^2 \cdot u_{xx} - 2r^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) \cdot u_{xy} + r^2 \cos(\varphi)^2 \cdot u_{yy}\right) \\
= \; & u_{xx} \cdot \cos(\varphi)^2 + \cancel{2u_{xy} \cdot \sin(\varphi)\cos(\varphi)} + u_{yy} \cdot \sin(\varphi)^2 \\
& + \cancel{u_x \cdot \tfrac{\cos(\varphi)}{r}} + \cancel{u_y \cdot \tfrac{\sin(\varphi)}{r}} - \cancel{\tfrac{\cos(\varphi)}{r} \cdot u_x} - \cancel{\tfrac{\sin(\varphi)}{r} \cdot u_y} \\
& + \sin(\varphi)^2 \cdot u_{xx} - \cancel{2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \cdot u_{xy}} + \cos(\varphi)^2 \cdot u_{yy} \\
= \; & (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \cdot u_{xx} + (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \cdot u_{yy} \\
= \; & u_{xx} + u_{yy} \\
= \; & u_{xx}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) + u_{yy}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).
\end{aligned}$$

Nun zur gefragten Bestätigung.

Zur Implikation $\Rightarrow$. Sei

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \; = \; 0$$

für $\binom{x}{y} \in D$ bekannt. Dann ist wegen der eben gezeigten Gleichheit auch

$$w_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r} w_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \; = \; u_{xx}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) + u_{yy}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \; = \; 0$$

für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Zur Implikation $\Leftarrow$. Sei

$$w_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r} w_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \; = \; 0$$

für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ bekannt. Also ist wegen der eben gezeigten Gleichheit auch

$$u_{xx}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) + u_{yy}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \; = \; w_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r} w_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \; = \; 0$$

für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Da nun jeder Punkt von $\binom{x}{y} \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ in der Form $\binom{x}{y} = \binom{r\cos(\varphi)}{r\sin(\varphi)}$ geschrieben werden kann für ein $r > 0$ und (wenigstens) ein $\varphi \in [0, 2\pi]$, folgt

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \; = \; 0$$

für $\binom{x}{y} \in D$.

(c) *Wir führen eine direkte Rechnung durch.*

Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Funktion $w(r,\varphi) = \ln(r)$:

$$w_\varphi = 0, \qquad w_{\varphi\varphi} = 0,$$
$$w_r = \frac{1}{r}, \qquad w_{rr} = -\frac{1}{r^2}.$$

Wir setzen die partiellen Ableitungen in die Differentialgleichung $(*)$ ein:

$$w_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r} w_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \;=\; w_{rr} + \tfrac{1}{r} w_r + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi} \;=\; -\tfrac{1}{r^2} + \tfrac{1}{r} \cdot \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{r^2} \cdot 0 \;=\; 0\,.$$

Wir verwenden (a) *und* (b).

Dank (a) ist $u(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ eine Lösung von $u_{xx} + u_{yy} = 0$ auf D.

Dank (b) ist dann

$$w(r,\varphi) \;=\; u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \;=\; \ln\left(\sqrt{(r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2}\right) \;=\; \ln(\sqrt{r^2}\,) \;=\; \ln(r)$$

eine Lösung von

$$w_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r} w_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \;=\; 0$$

für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Hausaufgabe 44 Sei

$$f \;:\; \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;:\; z \;\mapsto\; f(z) := \sinh(z)\;.$$

Sei $u(x,y) = \mathrm{Re}\,(f(x+\mathrm{i}y))$ und $v(x,y) = \mathrm{Im}\,(f(x+\mathrm{i}y))$.

(a) Bestimmen Sie $u(x,y)$ und $v(x,y)$.

(b) Verifizieren Sie durch eine direkte Rechnung, dass $u(x,y)$ und $v(x,y)$ harmonische Funktionen sind, die die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen.

(c) Geben Sie ein quellen- und wirbelfreies Vektorfeld g auf $\mathbb{R}^2$ an mit $g_2(x,y) = \cosh(x)\sin(y)$.

Lösung.

(a) Wir schreiben $\sinh(x+\mathrm{i}y)$ als $(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-x-\mathrm{i}y})/2$ und bestimmen Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}
f(z) = \sinh(x+\mathrm{i}y) &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-x-\mathrm{i}y}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)) - \mathrm{e}^{-x}(\cos(y) - \mathrm{i}\sin(y))\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\cos(y)\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) + \mathrm{i}\tfrac{1}{2}\sin(y)\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)\\
&= \cos(y)\sinh(x) + \mathrm{i}\sin(y)\cosh(x).
\end{aligned}$$

Somit wird

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y)) = \cos(y)\sinh(x) = \tfrac{1}{2}\cos(y)\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right),\\
v(x,y) &= \mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y)) = \sin(y)\cosh(x) = \tfrac{1}{2}\sin(y)\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right).
\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen zunächst die folgenden partiellen Ableitungen von u und von v.

$$\begin{aligned}
u_x &= \cos(y)\cosh(x) & u_{xx} &= \cos(y)\sinh(x)\\
u_y &= -\sin(y)\sinh(x) & u_{yy} &= -\cos(y)\sinh(x)\\
v_x &= \sin(y)\sinh(x) & v_{xx} &= \sin(y)\cosh(x)\\
v_y &= \cos(y)\cosh(x) & v_{yy} &= -\sin(y)\cosh(x)
\end{aligned}$$

Damit kann verifiziert werden, dass u und v harmonisch sind:

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= \cos(y)\sinh(x) - \cos(y)\sinh(x) &= 0\\
v_{xx} + v_{yy} &= \sin(y)\cosh(x) - \sin(y)\cosh(x) &= 0\;.
\end{aligned}$$

Ferner sind die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt:

$$u_x = \cos(y)\cosh(x) = v_y\;, \qquad u_y = -\sin(y)\sinh(x) = -v_x\;.$$

Alternativ folgt die Harmonizität von u und v auch aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen und dem Satz von Schwarz.

(c) Gemäß 8.4.3 ist

$$F(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(y)\sinh(x) \\ -\sin(y)\cosh(x) \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2$ ein quellen- und wirbelfreies Vektorfeld.

Dies folgt auch direkt aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen: die erste besagt

$$\operatorname{div} F(x, y) \;=\; u_x + (-v)_y \;=\; 0\,,$$

die zweite besagt

$$\operatorname{rot} F(x, y) \;=\; (-v)_x - u_y \;=\; 0\,.$$

Da nun $g_2(x, y) = \sin(y)\cosh(x)$ sein soll, nehmen wir auf $\mathbb{R}^2$

$$g(x, y) \;:=\; -F(x, y) \;=\; \begin{pmatrix} -\cos(y)\sinh(x) \\ \sin(y)\cosh(x) \end{pmatrix}\,.$$

Da F quellen- und wirbelfrei ist und da div und rot lineare Operatoren sind, ist auch $g = -F$ quellen- und wirbelfrei.