Künzer, Truong Wintersemester 2022/23

Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 1

Hausaufgabe 1
Wir betrachten die Kurve, die durch

$$C(s) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} s\cos(\ln(s)) \\ s\sin(\ln(s)) \\ s \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}^+$.

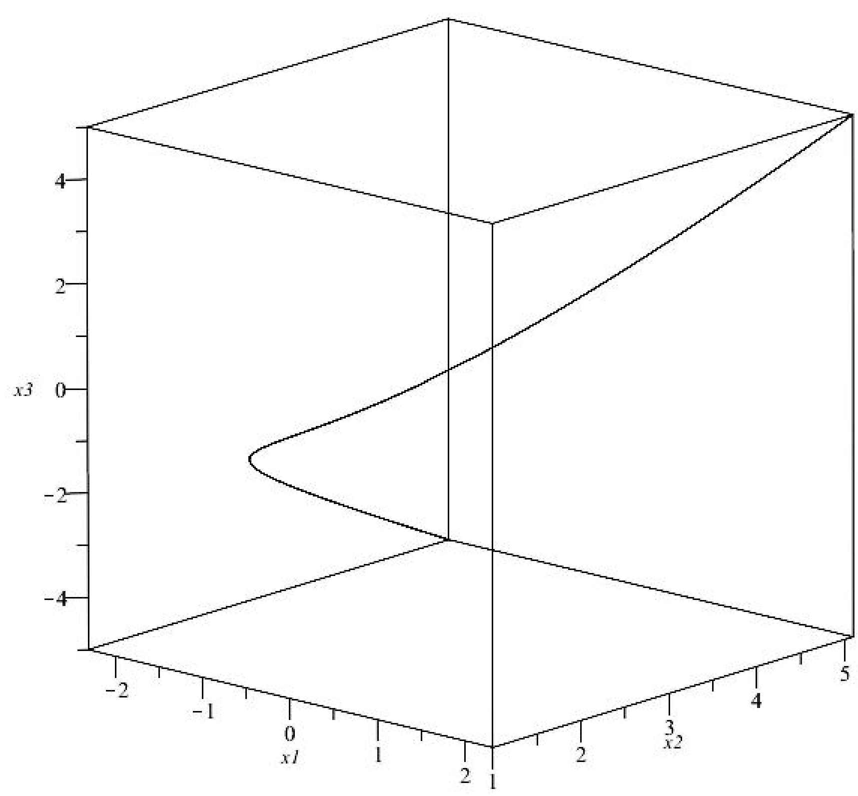
(a) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

(b) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$ für $s > 0$.

(c) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und den Krümmungskreisradius $\rho(s)$ für $s > 0$.

(d) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $M(s)$ des Krümmungskreises für $s > 0$.

Lösung.
Zunächst eine Skizze der Kurve $C(\mathbb{R}^+)$:



(a) Wir haben

$$C'(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \cdot \cos(\ln(s)) - s \cdot \sin(\ln(s)) \cdot \frac{1}{s} \\ 1 \cdot \sin(\ln(s)) + s \cdot \cos(\ln(s)) \cdot \frac{1}{s} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)) \\ \sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s)) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir kürzen mit $u := \ln(s)$ ab. Für $s > 0$ ist dann

$$\begin{aligned}
&|C'(s)| \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\big(\cos(u) - \sin(u)\big)^2 + \big(\sin(u) + \cos(u)\big)^2 + 1^2} \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\cos(u)^2 - 2\cos(u)\sin(u) + \sin(u)^2 + \sin(u)^2 + 2\sin(u)\cos(u) + \cos(u)^2 + 1} \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 \cdot (\cos(u)^2 + \sin(u)^2) + 1} \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 \cdot 1 + 1} \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \\
=\;& 1\,.
\end{aligned}$$

Also ist $C(s)$ eine normierte Parametrisierung.

(b) Wir haben

$$v(s) = C'(s) \overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)) \\ \sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s)) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Normalenvektor $n(s)$ rechnen wir

$$C''(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sin(\ln(s)) \cdot \frac{1}{s} - \cos(\ln(s)) \cdot \frac{1}{s} \\ \cos(\ln(s)) \cdot \frac{1}{s} - \sin(\ln(s)) \cdot \frac{1}{s} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{s} \begin{pmatrix} -\sin(\ln(s)) - \cos(\ln(s)) \\ \cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir kürzen mit $u := \ln(s)$ ab. Für $s > 0$ ist dann

$$\begin{aligned}
&|C''(s)| \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{s} \sqrt{\big(-(\sin(u) + \cos(u))\big)^2 + \big(\cos(u) - \sin(u)\big)^2 + 0^2} \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{s} \sqrt{\sin(u)^2 + 2\sin(u)\cos(u) + \cos(u)^2 + \cos(u)^2 - 2\cos(u)\sin(u) + \sin(u)^2} \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{s} \cdot \sqrt{2 \cdot (\sin(u)^2 + \cos(u)^2)} \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{s} \cdot \sqrt{2 \cdot 1} \\
=\;& \frac{1}{s} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\,.
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$n(s) = \frac{C''(s)}{|C''(s)|} = s \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{s} \begin{pmatrix} -\sin(\ln(s)) - \cos(\ln(s)) \\ \cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin(\ln(s)) - \cos(\ln(s)) \\ \cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir haben

$$\kappa(s) = |C''(s)| \overset{\text{(b)}}{=} \frac{1}{s} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \text{und} \qquad \rho(s) = \frac{1}{|C''(s)|} = s \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

(d) Wir haben

$$\begin{aligned}
M(s) &= C(s) + C''(s) \cdot \frac{1}{|C''(s)|^2} \\
&\overset{\text{(b)}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} s\cos(\ln(s)) \\ s\sin(\ln(s)) \\ s \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{s} \begin{pmatrix} -\sin(\ln(s)) - \cos(\ln(s)) \\ \cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(s \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 \\
&= \frac{s}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos(\ln(s)) \\ \sin(\ln(s)) \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\ln(s)) - \cos(\ln(s)) \\ \cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{s}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos(\ln(s)) \\ \sin(\ln(s)) \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{s}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\ln(s)) - \cos(\ln(s)) \\ \cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{s}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sin(\ln(s)) - \frac{1}{2}\cos(\ln(s)) \\ -\frac{1}{2}\sin(\ln(s)) + \frac{3}{2}\cos(\ln(s)) \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2

Wir betrachten die Kurve in der x_1-x_2-Ebene, die durch

$$C(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(s) \\ \sqrt{1+s^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}$.

(a) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

(b) Überprüfen Sie: Es parametrisiert $C(s)$ den Graphen $x_2 = \cosh(x_1)$.
Skizzieren Sie die Kurve in der x_1-x_2-Ebene.

(c) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$.

(d) Bestimmen Sie den Radius $\rho(s)$ und den Mittelpunkt $M(s)$ des Krümmungskreises.

Zeichnen Sie den Krümmungskreis für $s = 0$ in die Skizze aus (b) ein.

Lösung.

(a) Wir haben die Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) .$$

Wir berechnen die Ableitung von $\operatorname{arsinh}(s)$ mit der Umkehrregel $\left(f^{-1}(s)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(s)\right)}$.

Wir wählen $f(s) := \sinh(s)$. Dann ist die Ableitung gegeben durch $f'(s) = \cosh(s)$ und die Umkehrfunktion ist gegeben durch $f^{-1}(s) = \operatorname{arsinh}(s)$.

In die Formel eingesetzt ergibt das

$$(\operatorname{arsinh}(s))' = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(s))} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + \big(\sinh(\operatorname{arsinh}(s))\big)^2}} \overset{(**)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} .$$

Bei $(*)$ verwenden wir die Identität $\cosh(u)^2 - \sinh(u)^2 = 1$ und $\cosh(u) > 0$, woraus

$$\cosh(u) = \sqrt{1 + \sinh(u)^2} .$$

Bei $(**)$ nutzen wir aus, dass $\sinh(u)$ Umkehrfunktion von $\operatorname{arsinh}(u)$ ist, also

$$\sinh(\operatorname{arsinh}(s)) = s .$$

Wir berechnen die Ableitung von $\sqrt{1+s^2}$:

$$\left(\sqrt{1+s^2}\right)' = \left(\left(1+s^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+s^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2s = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} .$$

Dann ist

$$C'(s) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}} \\ \dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

und damit

$$|C'(s)| = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \cdot \sqrt{1^2+s^2+0^2} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \cdot \sqrt{1+s^2} = 1 \,.$$

Also ist $C(s)$ eine normierte Parametrisierung.

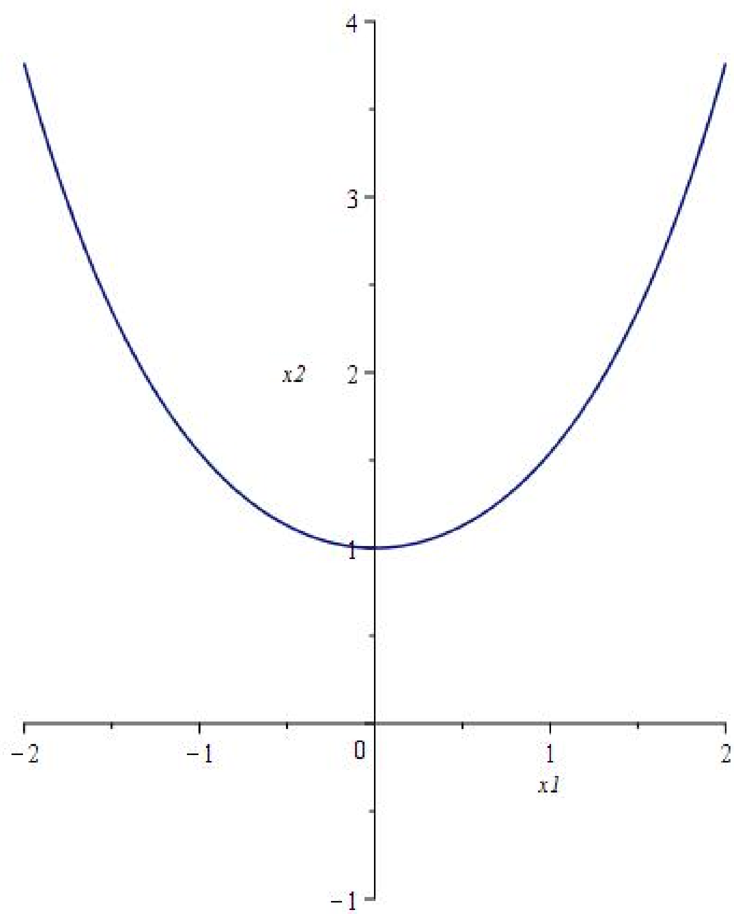
(b) In unserer Parametrisierung ist $x_1 = \operatorname{arsinh}(s)$, $x_2 = \sqrt{1+s^2}$ und $x_3 = 0$. Da arsinh surjektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet, müssen wir also $\cosh(\operatorname{arsinh}(s)) \stackrel{!}{=} \sqrt{1+s^2}$ zeigen.

Wir haben

$$\cosh\left(\operatorname{arsinh}(s)\right) \stackrel{(*)}{=} \sqrt{1+\sinh(\operatorname{arsinh}(s))^2} \stackrel{(**)}{=} \sqrt{1+s^2}\,,$$

wobei wir wieder die Identitäten $(*)$ und $(**)$ aus (a) verwenden.

Eine Skizze der Kurve $C(\mathbb{R})$:



(c) Wir haben

$$v(s) = C'(s) \overset{(a)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = (1+s^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Für den Normalenvektor $n(s)$ berechnen wir

$$\begin{aligned} C''(s) &= -\frac{1}{2}(1+s^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2s \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + (1+s^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -(1+s^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1+s^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (1+s^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} -s \\ -s^2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1+s^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1+s^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (1+s^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} -s \\ -s^2+1+s^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

und

$$|C''(s)| = \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} \cdot \sqrt{(-s)^2+1^2+0^2} = \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} \cdot \sqrt{s^2+1} = \frac{1}{1+s^2} .$$

Damit ist

$$n(s) = \frac{C''(s)}{|C''(s)|} = (1+s^2) \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(d) Wir haben

$$\rho(s) = \frac{1}{|C'(s)|} = 1+s^2 ,$$

und

$$\begin{aligned} M(s) = C(s) + n(s) \cdot \rho(s) &= \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(s) \\ \sqrt{1+s^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1+s^2) \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(s) \\ \sqrt{1+s^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{1+s^2} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(s) - s\sqrt{1+s^2} \\ 2 \cdot \sqrt{1+s^2} \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Für $s = 0$ wird dann

$$\rho(0) = 1 + 0^2 = 1 \quad \text{und} \quad M(0) = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(0) \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Eine Skizze der Kurve $C(\mathbb{R})$ und des Krümmungskreises an der Stelle $s = 0$: