Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 2

Hausaufgabe 3

Sei $C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$, definiert auf $\mathbb{R}$.

Dies liefert die Kurve $K := C(\mathbb{R})$.

Wir betrachten den Kurvenpunkt $C(t)$ für ein gegebenes $t \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme den Tangentenvektor $v(t)$.

(b) Man bestimme den Normalenvektor $n(t)$, falls $t \neq 0$.

(c) Man bestimme die Krümmung $\kappa(t)$.

(d) Man bestimme den Krümmungskreis im Kurvenpunkt $C(\frac{1}{2})$. Skizze!

Lösung.

(a) Wir haben

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |C'(t)| = \sqrt{1^2 + (3t^2)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 9t^4}\,.$$

Also ist

$$v(t) = \frac{C'(t)}{|C'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

(b) Wir haben

$$\begin{aligned} |C'(t)| &\overset{\text{(a)}}{=} \sqrt{1+9t^4} \\ |C'(t)|' &= \frac{1}{2} \cdot (1+9t^4)^{-1/2} \cdot 36t^3 = \frac{18t^3}{\sqrt{1+9t^4}}\,, \end{aligned}$$

und

$$C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C'(t) \times C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6t \end{pmatrix}, \quad |C'(t) \times C''(t)| = 6|t|\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} n(t) &= \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)|} \left(|C'(t)| \cdot C''(t) - |C'(t)|' \cdot C'(t)\right) \\ &= \frac{1}{6|t|} \left(\sqrt{1+9t^4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{18t^3}{\sqrt{1+9t^4}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{6|t|} \left(\frac{1+9t^4}{\sqrt{1+9t^4}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{18t^3}{\sqrt{1+9t^4}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{6|t|\sqrt{1+9t^4}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 6t+54t^5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18t^3 \\ 54t^5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{6|t|\sqrt{1+9t^4}} \begin{pmatrix} -18t^3 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{t}{|t|\sqrt{1+9t^4}} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

(c) Aus (b) wissen wir

$$|C'(t)| = \sqrt{1+9t^4} \quad \text{und} \quad |C'(t) \times C''(t)| = 6|t|\,.$$

Also ist

$$\kappa(t) = \frac{1}{|C'(t)|^3} \cdot |C'(t) \times C''(t)| = \frac{6|t|}{(\sqrt{1+9t^4})^3}\,.$$

(d) Wir haben

$$C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n(t) \overset{\text{(b)}}{=} \frac{t}{|t|\sqrt{1+9t^4}} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} \overset{\text{(c)}}{=} \frac{(\sqrt{1+9t^4})^3}{6|t|}\,.$$

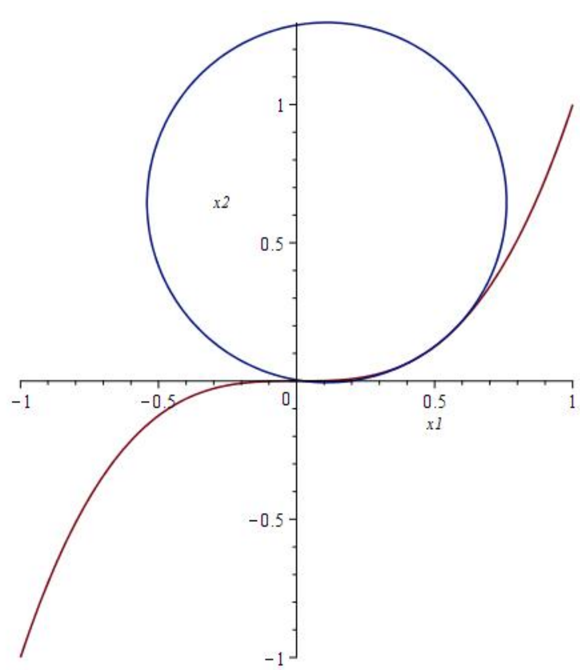
Also ist

$$\begin{aligned}
C\left(\frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/8 \\ 0 \end{pmatrix} \\
n\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+9\cdot\frac{1}{16}}} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\rho\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(\sqrt{1+\frac{9}{16}}\right)^3}{\frac{6}{2}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{25}{16}}\right)^3}{3} = \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^3}{3} = \frac{125}{192}\,,
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{1}{2}\right) &= C\left(\frac{1}{2}\right) + n\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \rho\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{125}{192} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25/64 \\ 25/48 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7/64 \\ 31/48 \\ 0 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

Eine Skizze mit der Kurve $C(\mathbb{R})$ und dem Krümmungskreis bei $t = \frac{1}{2}$:



Hausaufgabe 4

Sei $C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$, definiert auf $\mathbb{R}$.

Dies liefert die Kurve $K := C(\mathbb{R})$.

Wir betrachten den Kurvenpunkt $C(t)$ für ein gegebenes $t \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme den Tangentenvektor $v(t)$.

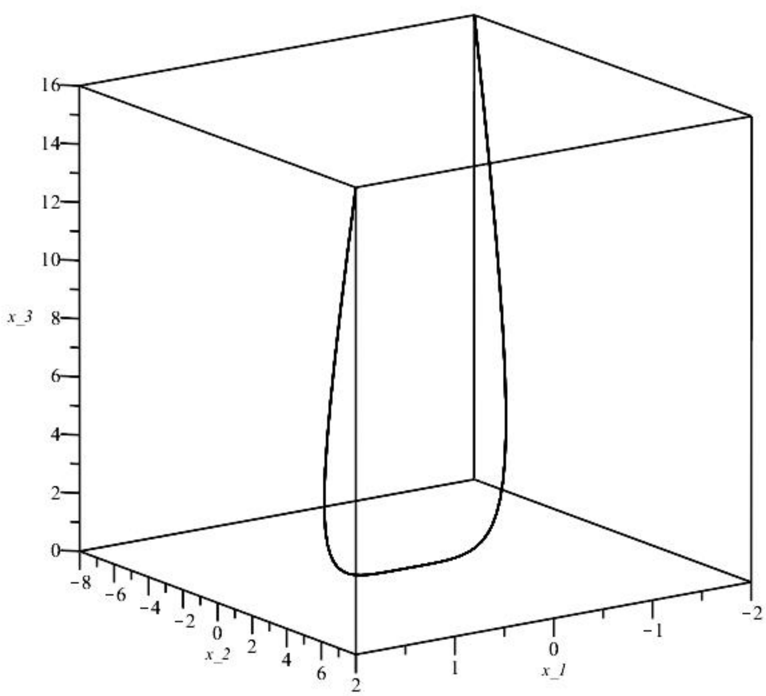
(b) Man bestimme den Normalenvektor $n(t)$ und den Binormalenvektor $b(t)$, falls $t \neq 0$.

(c) Man bestimme die Krümmung $\kappa(t)$.

(d) Man bestimme die Torsion $\tau(t)$, falls $t \neq 0$.

Lösung.

Eine Skizze mit dem Kurvenausschnitt $C([-2, 2])$:



(a) Wir haben

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |C'(t)| = \sqrt{1 + 9t^4 + 16t^6}\,.$$

Also ist

$$v(t) = \frac{C'(t)}{|C'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 9t^4 + 16t^6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix}\,.$$

(b) Wir haben

$$|C'(t)| \overset{(a)}{=} \sqrt{1+9t^4+16t^6}$$

$$|C'(t)|' = \frac{1}{2} \cdot (1+9t^4+16t^6)^{-1/2} \cdot (36t^3+96t^5) = \frac{18t^3+48t^5}{\sqrt{1+9t^4+16t^6}},$$

und

$$C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \\ 12t^2 \end{pmatrix}, \quad C'(t) \times C''(t) = \begin{pmatrix} 12t^4 \\ -12t^2 \\ 6t \end{pmatrix}, \quad |C'(t) \times C''(t)| = 6|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
n(t) &= \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)|} \left(|C'(t)| \cdot C''(t) - |C'(t)|' \cdot C'(t)\right) \\
&= \frac{1}{6|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1}} \left(\sqrt{1+9t^4+16t^6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \\ 12t^2 \end{pmatrix} - \frac{18t^3+48t^5}{\sqrt{1+9t^4+16t^6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{6|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1}} \left(\frac{1+9t^4+16t^6}{\sqrt{1+9t^4+16t^6}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \\ 12t^2 \end{pmatrix} - \frac{18t^3+48t^5}{\sqrt{1+9t^4+16t^6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{6|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1} \cdot \sqrt{1+9t^4+16t^6}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 6t+54t^5+96t^7 \\ 12t^2+108t^6+192t^8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18t^3+48t^5 \\ 54t^5+144t^7 \\ 72t^6+192t^8 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{6|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1} \cdot \sqrt{1+9t^4+16t^6}} \begin{pmatrix} -18t^3-48t^5 \\ 6t-48t^7 \\ 12t^2+36t^6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{t}{|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1} \cdot \sqrt{1+9t^4+16t^6}} \begin{pmatrix} -3t^2-8t^4 \\ 1-8t^6 \\ 2t+6t^5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir haben

$$b(t) = \frac{C'(t) \times C''(t)}{|C'(t) \times C''(t)|} = \frac{1}{6|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1}} \begin{pmatrix} 12t^4 \\ -12t^2 \\ 6t \end{pmatrix} = \frac{t}{|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1}} \begin{pmatrix} 2t^3 \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir haben

$$|C'(t)| \overset{(a)}{=} \sqrt{1+9t^4+16t^6} \quad \text{und} \quad |C'(t) \times C''(t)| \overset{(b)}{=} 6|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1}.$$

Also ist

$$\kappa(t) = \frac{1}{|C'(t)|^3} \cdot |C'(t) \times C''(t)| = \frac{6|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1}}{(\sqrt{1+9t^4+16t^6})^3}.$$

(d) Wir haben

$$C'(t) \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix}, \quad C''(t) \overset{(b)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \\ 12t^2 \end{pmatrix}, \quad C'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 24t \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned}
\det\big(C'(t), C''(t), C'''(t)\big) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t^2 & 6t & 6 \\ 4t^3 & 12t^2 & 24t \end{pmatrix} = \det(1) \cdot \det \begin{pmatrix} 6t & 6 \\ 12t^2 & 24t \end{pmatrix} \\
&= 6t \cdot 24t - 6 \cdot 12t^2 = 72t^2.
\end{aligned}$$

Also wird die Torsion zu

$$\tau(t) = \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)|^2} \cdot \det\big(C'(t), C''(t), C'''(t)\big) \overset{\text{(b)}}{=} \frac{72t^2}{(6|t|\sqrt{4t^6+4t^2+1})^2} = \frac{2}{4t^6+4t^2+1}\,.$$