Künzer, Truong Wintersemester 2022/23

Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 3

Hausaufgabe 5

(a) Wir betrachten den Kreis $K_1 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + (x_2-2)^2 = 1 \right\}$ in der x_1-x_2-Ebene.

Man parametrisiere den Torus $T \subseteq \mathbb{R}^3$, der durch Rotation von K_1 um die x_1-Achse entsteht.

(b) Wir betrachten die Halbebene $H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 = x_3,\ x_2 \geqslant 0 \right\}$.

Man parametrisiere die Kurve $K := T \cap H$.

(c) Man bestimme E, F und G für die Parametrisierung des Torus aus (a).

(d) Man bestimme die Länge von K auf zwei Arten:

Einmal direkt und einmal unter Verwendung von E, F und G.

Lösung.

(a) Eine Parametrisierung des Kreises K_1 ist gegeben durch $\left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) \\ 2+\sin(\varphi) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.

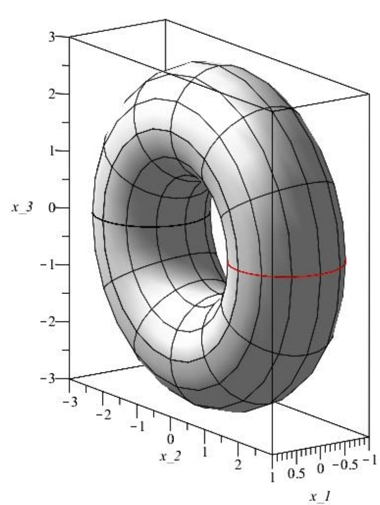
Eine Drehung um die x_1-Achse um den Winkel ψ wird durch die Drehmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{smallmatrix}\right)$ ausgedrückt.

Also ist eine Parametrisierung vom Torus T gegeben durch

$$\Phi(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 2+\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)\cdot(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)\cdot(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix},$$

wobei φ, $\psi \in [0, 2\pi]$.

Eine Grafik mit dem Torus T und dem Kreis K_1 (in rot):



(b) Die Beschreibung der Halbebene H verlangt $x_2 = x_3$, also

$$\cos(\psi) \cdot (2 + \sin(\varphi)) = \sin(\psi) \cdot (2 + \sin(\varphi)) .$$

Daraus folgt $\cos(\psi) = \sin(\psi)$, was durch $\psi_1 = \frac{\pi}{4}$ und durch $\psi_2 = \frac{\pi}{4} + \pi$ gelöst wird.

Wir haben

$$\cos(\psi_1) \cdot (2 + \sin(\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2 + \sin(\varphi)) \geqslant 0$$

und

$$\cos(\psi_2) \cdot (2 + \sin(\varphi)) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2 + \sin(\varphi)) < 0$$

Da $x_2 \geqslant 0$ verlangt ist, ist $\psi_1 = \frac{\pi}{4}$ unsere einzige Lösung.

Also ist eine Parametrisierung von K gegeben durch

$$C(\varphi) = \Phi\Big(\varphi, \frac{\pi}{4}\Big) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \sin(\varphi)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \sin(\varphi)) \end{pmatrix} ,$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(c) Wir haben

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\psi)\cos(\varphi) \\ \sin(\psi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\psi)(2 + \sin(\varphi)) \\ \cos(\psi)(2 + \sin(\varphi)) \end{pmatrix} .$$

Also

$$\begin{aligned} E &= |\Phi_\varphi|^2 \\ &= (-\sin(\varphi))^2 + (\cos(\psi)\cos(\varphi))^2 + (\sin(\psi)\cos(\varphi))^2 \\ &= \sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 \big(\cos(\psi)^2 + \sin(\psi)^2\big) \\ &= \sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle \Phi_\varphi | \Phi_\psi \rangle \\ &= (-\sin(\varphi)) \cdot 0 - \cos(\psi)\cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)(2 + \sin(\varphi)) + \sin(\psi)\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)(2 + \sin(\varphi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= |\Phi_\psi|^2 \\ &= 0^2 + (-\sin(\psi)(2 + \sin(\varphi))^2 + (\cos(\psi)(2 + \sin(\varphi))^2 \\ &= (\sin(\psi)^2 + \cos(\psi)^2)(2 + \sin(\varphi))^2 \\ &= (2 + \sin(\varphi))^2 . \end{aligned}$$

(d) Wir berechnen die Länge von K auf direkte Weise mit der Formel $\int_a^b |C'(\varphi)| \mathrm{d}\varphi$.

Wir verwenden die Parametrisierung $C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2+\sin(\varphi)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ aus (b).

Dann ist

$$|C'(\varphi)| = \left| \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\varphi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\varphi) \end{pmatrix} \right| = \sin(\varphi)^2 + \frac{1}{2}\cos(\varphi)^2 + \frac{1}{2}\cos(\varphi)^2 = 1\,,$$

und $a = 0$, $b = 2\pi$, da $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Also ist die Länge von K gegeben durch

$$L = \int_a^b |C'(\varphi)| \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi\,.$$

Alternativer direkter Weg: Man kann auch erkennen, daß K ein Kreis von Radius 1 ist und daher den Umfang 2π hat.

Wir berechnen die Länge von K unter Verwendung von E, F und G mit der Formel $\int_a^b \sqrt{E \cdot (c_1')^2 + 2F \cdot c_1'c_2' + G \cdot (c_2')^2}$.

Zunächst müssen wir ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine Abbildung $c = \binom{c_1}{c_2} : I \to [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ finden mit

$$\Phi\left(c_1(\varphi), c_2(\varphi)\right) \stackrel{!}{=} C(\varphi)\,,$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} \cos\bigl(c_1(\varphi)\bigr) \\ \cos\bigl(c_2(\varphi)\bigr)\,\bigl(2 + \sin\bigl(c_1(\varphi)\bigr)\bigr) \\ \sin\bigl(c_2(\varphi)\bigr)\,\bigl(2 + \sin\bigl(c_1(\varphi)\bigr)\bigr) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \sin(\varphi)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \sin(\varphi)) \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $c_1(\varphi) := \varphi$ und $c_2(\varphi) := \frac{\pi}{4}$ mit $I = [0, 2\pi]$, dann ist die obige Gleichung erfüllt.

Also haben wir

$$c(\varphi) = \begin{pmatrix} c_1(\varphi) \\ c_2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c'(\varphi) = \begin{pmatrix} c_1'(\varphi) \\ c_2'(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus (c) wissen wir $E = 1$, und damit ist

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{E \cdot \left(c_1'(\varphi)\right)^2 + 2F \cdot c_1'(\varphi)c_2'(\varphi) + G \cdot \left(c_2'(\varphi)\right)^2} \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 \cdot 1 + 2F \cdot 1 \cdot 0 + G \cdot 0^2}\, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi\,. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 6

(a) Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(\varphi, u) := \begin{pmatrix} \cosh(u) \\ \sinh(u)\cos(\varphi) \\ \sinh(u)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$,

wobei $u \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Man überprüfe: Es parametrisiert Φ das Hyperboloid $H = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1,\ x_1 \geqslant 0 \}$.

Man skizziere die Schnitte mit den Koordinatenebenen in ein Koordinatensystem.

(b) Man bestimme E, F und G für die Parametrisierung Φ.

(c) Man bestimme den Flächeninhalt von $H \cap \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1 \}$ unter Verwendung von E, F und G.

Das Integral braucht nicht ausgewertet zu werden.

Lösung.

(a) Zu überprüfen ist, dass Φ die Bedingungen $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ und $x_1 \geqslant 0$ erfüllt.

Wir haben

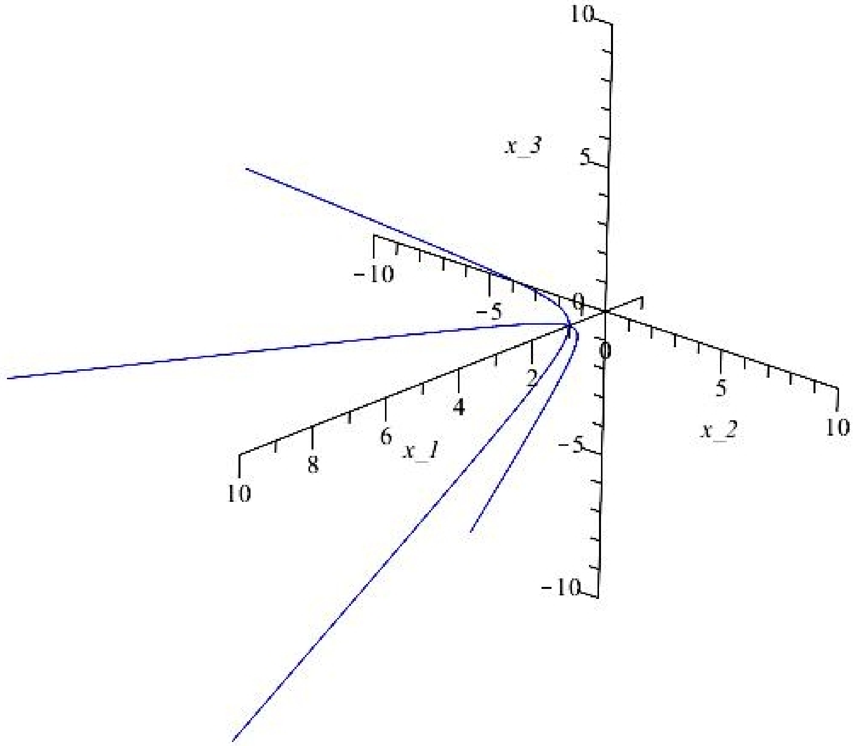
$$\begin{aligned} &\cosh(u)^2 - \big(\sinh(u)\cos(u)\big)^2 - \big(\sinh(u)\sin(\varphi)\big)^2 \\ =& \cosh(u)^2 - \sinh(u)^2 \big(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\big) \\ =& \cosh(u)^2 - \sinh(u)^2 \\ =& 1\,, \end{aligned}$$

und $\cosh(u) \geqslant 0$ für $u \in \mathbb{R}_0^+$.

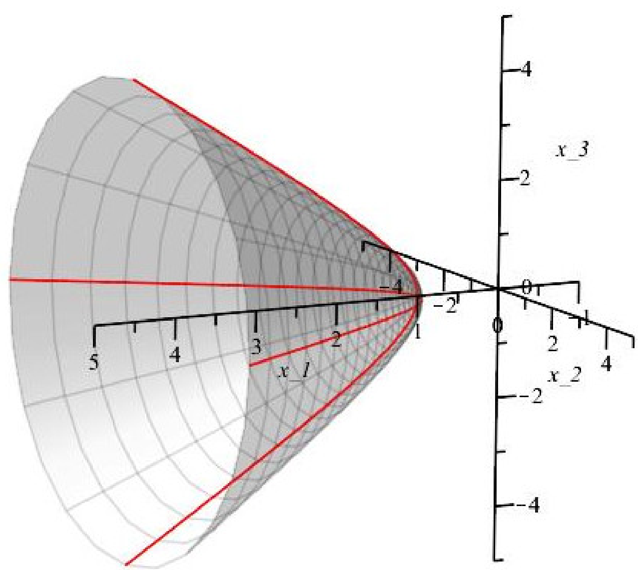
Ferner nimmt $\sinh(u)$ für $u \in \mathbb{R}_0^+$ jeden Wert in $\mathbb{R}_0^+$ an. Somit parametrisiert $\begin{pmatrix} \cosh(u) \\ \sinh(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ den halben Hyperbelast $\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 = 0 \} = \{ \begin{pmatrix} \sqrt{1+x_2^2} \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \}$. Dieser halbe Hyperbelast wird noch mittels der Drehmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ um die x_1-Achse rotiert und beschreibt so die Fläche H.

Also ist Φ eine Parametrisierung von H.

Eine Grafik der Schnitte des Hyperboloids H mit den Koordinatenebenen:



Eine Grafik des Hyperboloids H, mit den Schnitten mit den Koordinatenebenen in rot:



(b) Wir haben

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sinh(u)\sin(\varphi) \\ \sinh(u)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_u = \begin{pmatrix} \sinh(u) \\ \cosh(u)\cos(\varphi) \\ \cosh(u)\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} E &= |\Phi_\varphi|^2 \\ &= 0^2 + (\sinh(u)\sin(\varphi))^2 + (\sinh(u)\cos(\varphi))^2 \\ &= \sinh(u)^2\left(\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2\right) \\ &= \sinh(u)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle \Phi_\varphi | \Phi_u \rangle \\ &= 0 \cdot \sinh(u) - \sinh(u)\sin(\varphi) \cdot \cosh(u)\cos(\varphi) + \sinh(u)\cos(\varphi) \cdot \cosh(u)\sin(\varphi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= |\Phi_u|^2 \\ &= \sinh(u)^2 + (\cosh(u)\cos(\varphi))^2 + (\cosh(u)\sin(\varphi))^2 \\ &= \sinh(u)^2 + \cosh(u)^2\left(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\right) \\ &= \left(\cosh(u)^2 - 1\right) + \cosh(u)^2 \\ &= 2\cosh(u)^2 - 1\,. \end{aligned}$$

(c) Wir berechnen den Flächeninhalt mit der Formel $\iint_M \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}u\,.$

Die Größen E, F und G sind aus (b) bekannt.

Wir suchen nun eine Beschreibung des Bereiches M, über den integriert wird.

Aus der Bedingung $x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1$ folgt

$$(\sinh(u)\cos(\varphi))^2 + (\sinh(u)\sin(\varphi))^2 \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \sinh(u)^2 \leqslant 1\,.$$

Da $u \geqslant 0$ verlangt ist, folgt

$$0 \leqslant \sinh(u) \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arsinh}(0) \leqslant u \leqslant \operatorname{arsinh}(1) \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant u \leqslant \operatorname{arsinh}(1)\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \iint_M \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\operatorname{arsinh}(1)} \int_0^{2\pi} \sqrt{\sinh(u)^2 \cdot (2\cosh(u)^2 - 1) - 0^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\operatorname{arsinh}(1)} \int_0^{2\pi} \sinh(u) \cdot \sqrt{2\cosh(u)^2 - 1}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}u\,. \end{aligned}$$

Wenn man dieses Integral mit Maple auswertet, dann ergibt sich:

$$\int\limits_0^{\operatorname{arsinh}(1)} \int\limits_0^{2\pi} \sinh(u) \cdot \sqrt{2\cosh(u)^2 - 1}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi\left(4\ln(1+\sqrt{2}) + 8\sqrt{3} - 3\ln(2+\sqrt{3})\sqrt{2} + 6\sqrt{3}\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})\sqrt{2} - 4\ln(2+\sqrt{3}) - 4\sqrt{2} - 6\right)}{6 + 4\sqrt{2}}\,.$$