Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 4

Hausaufgabe 7

(a) Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ (u-v)(u+v) \end{pmatrix}$, wobei $u,\, v \in \mathbb{R}$.

Man skizziere die Schnitte mit den Koordinatenebenen in ein Koordinatensystem.

Was für eine Fläche S wird von Φ parametrisiert?

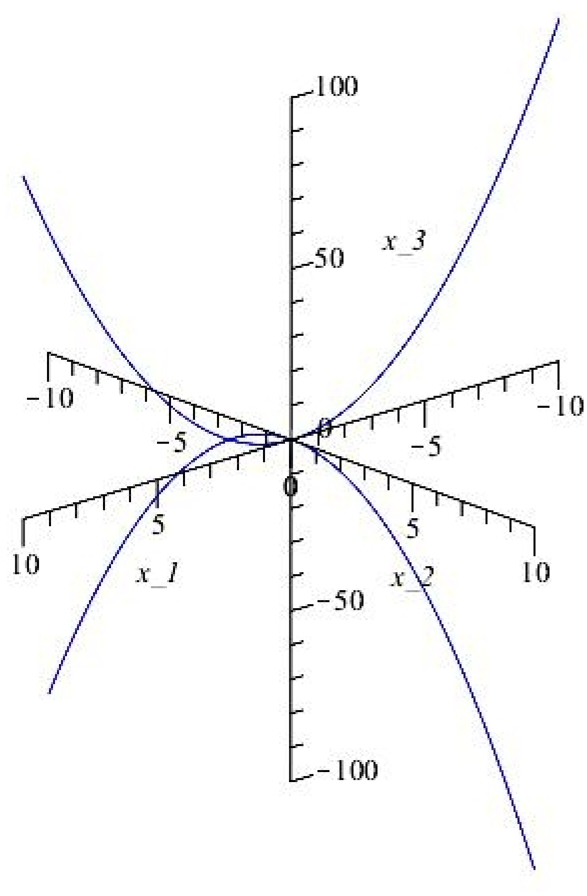
(b) Man bestimme E, F und G für die Parametrisierung Φ.

(c) Man bestimme die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} für $i,\, j,\, k \in \{1,2\}$ mittels E, F und G.

(d) Man überprüfe die definierenden Gleichungen für die Christoffelsymbole.

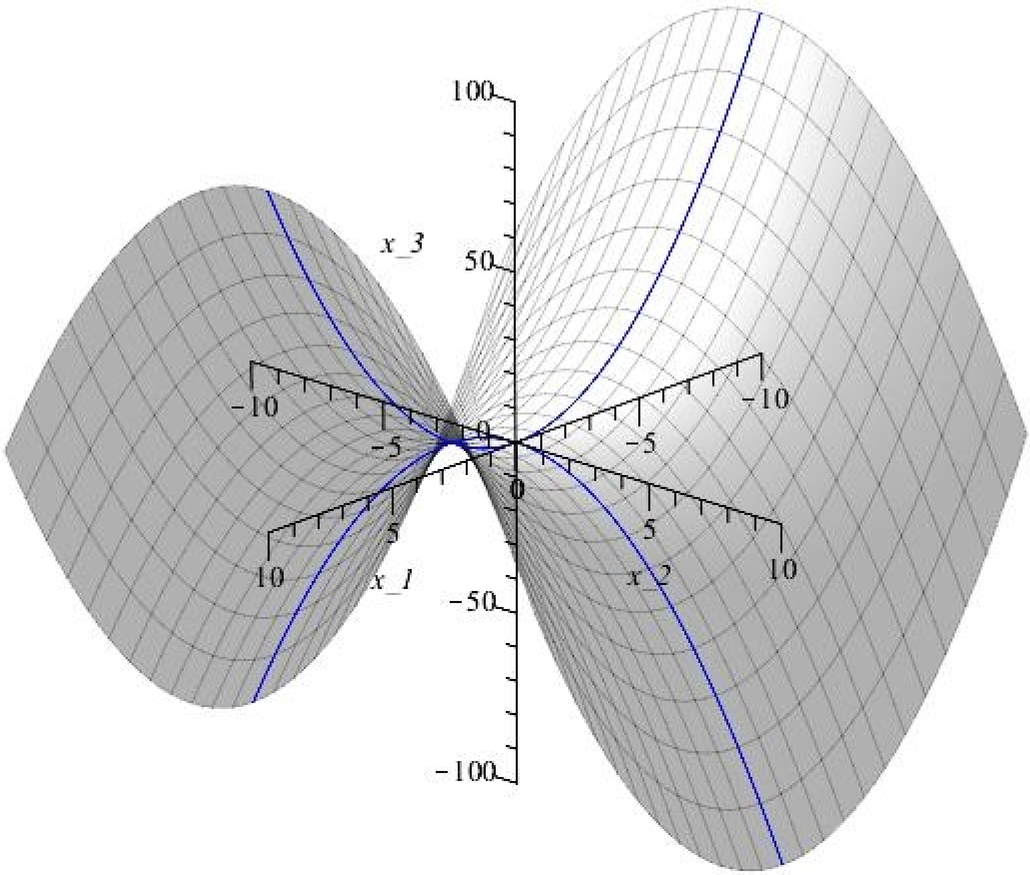
Lösung.

(a) Eine Grafik der Schnitte der Fläche S mit den Koordinatenebenen.



Es ist S ein hyperbolisches Paraboloid, anschaulich also eine Sattelfläche.

Eine Grafik von S mit den Schnitten in blau.



(b) Wir haben

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} .$$

Also ist

$$\begin{aligned} E &= \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + 4u^2 \\ F &= \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} \right\rangle = -4uv \\ G &= \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + 4v^2 . \end{aligned}$$

(c) Wir betrachten die Matrix $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{EG-F^2} \cdot \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{(1+4u^2)(1+4v^2)-(-4uv)^2} \begin{pmatrix} 1+4v^2 & 4uv \\ 4uv & 1+4u^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4(u^2+v^2)+1} \begin{pmatrix} 1+4v^2 & 4uv \\ 4uv & 1+4u^2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Ferner haben wir

$$\Phi_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \ \Phi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Wir berechnen die Christoffelsymbole Γ_{11}^1 und Γ_{11}^2 :

Es ist

$$\begin{array}{rclcr} \frac{1}{2}E_u & = & \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1+4u^2) & = & 4u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(-4uv) - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(1+4u^2) & = & -4v \end{array}$$

Alternativ ist auch

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}E_u &= \langle \Phi_{uu} | \Phi_u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \right\rangle = 4u \\ F_u - \tfrac{1}{2}E_v &= \langle \Phi_{uu} | \Phi_v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} \right\rangle = -4v\,. \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} = \frac{1}{4(u^2+v^2)+1} \begin{pmatrix} 1+4v^2 & 4uv \\ 4uv & 1+4u^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4u \\ -4v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4(u^2+v^2)+1} \begin{pmatrix} (1+4v^2)\cdot 4u - 4uv\cdot 4v \\ 4uv\cdot 4u - (1+4u^2)\cdot 4v \end{pmatrix} = \frac{1}{4(u^2+v^2)+1} \begin{pmatrix} 4u \\ -4v \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Somit ist $\Gamma_{11}^1 = \frac{4u}{4(u^2+v^2)+1}$ und $\Gamma_{11}^2 = \frac{-4v}{4(u^2+v^2)+1}$.

Wir berechnen die Christoffelsymbole Γ_{12}^1 und Γ_{12}^2 :

Es ist

$$\begin{array}{rclcr} \frac{1}{2}E_v & = & \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(1+4u^2) & = & 0 \\ \frac{1}{2}G_u & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1+4v^2) & = & 0 \end{array}$$

Alternativ ist auch

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}E_v &= \langle \Phi_{uv} | \Phi_u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \tfrac{1}{2}G_u &= \langle \Phi_{uv} | \Phi_v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} \right\rangle = 0\,. \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Somit ist $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$.

Wir berechnen die Christoffelsymbole Γ_{22}^1 und Γ_{22}^2 :

Es ist

$$\begin{array}{rclcr} F_v - \frac{1}{2}G_u & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(-4uv) - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1+4v^2) & = & -4u \\ \frac{1}{2}G_v & = & \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(1+4v^2) & = & 4v \end{array}$$

Alternativ ist auch

$$\begin{aligned} F_v - \tfrac{1}{2}G_u &= \langle \Phi_{vv} | \Phi_u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \right\rangle = -4u \\ \tfrac{1}{2}G_v &= \langle \Phi_{vv} | \Phi_v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} \right\rangle = 4v\,. \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{22}^2\end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix}E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix}F_v-\frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}G_v\end{pmatrix} = \frac{1}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}1+4v^2 & 4uv\\ 4uv & 1+4u^2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4u\\ 4v\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}-(1+4v^2)\cdot 4u+4uv\cdot 4v\\ -4uv\cdot 4u+(1+4u^2)\cdot 4v\end{pmatrix} = \frac{1}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}-4u\\ 4v\end{pmatrix}.$$

Somit ist $\Gamma_{22}^1 = \frac{-4u}{4(u^2+v^2)+1}$ und $\Gamma_{22}^2 = \frac{4v}{4(u^2+v^2)+1}$.

(d) Wir haben

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix}-2u\\ 2v\\ 1\end{pmatrix}.$$

Es wird

$$\begin{aligned}
\Phi_{uu} - \Gamma_{11}^1 \cdot \Phi_u - \Gamma_{11}^2 \cdot \Phi_v &= \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{4u}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}1\\0\\2u\end{pmatrix} - \frac{-4v}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}0\\1\\-2v\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4(u^2+v^2)+1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\8(u^2+v^2)+2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4u\\0\\8u^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4v\\-8v^2\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}-4u\\4v\\2\end{pmatrix}\\
&= \frac{2}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}-2u\\2v\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit $h_{11} = \frac{2}{4(u^2+v^2)+1}$ wird also

$$\Phi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \cdot \Phi_u + \Gamma_{11}^2 \cdot \Phi_v + h_{11} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v).$$

Es wird

$$\begin{aligned}
\Phi_{uv} - \Gamma_{12}^1 \cdot \Phi_u - \Gamma_{12}^2 \cdot \Phi_v &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2u\end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-2v\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&= 0 \cdot \begin{pmatrix}-2u\\2v\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit $h_{12} = 0$ wird also

$$\Phi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \cdot \Phi_u + \Gamma_{12}^2 \cdot \Phi_v + h_{12} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v).$$

Es wird

$$\begin{aligned}
\Phi_{vv} - \Gamma_{22}^1 \cdot \Phi_u - \Gamma_{22}^2 \cdot \Phi_v &= \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} - \frac{-4u}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}1\\0\\2u\end{pmatrix} - \frac{4v}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}0\\1\\-2v\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4(u^2+v^2)+1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-8(u^2+v^2)-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4u\\0\\8u^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4v\\-8v^2\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}4u\\-4v\\-2\end{pmatrix}\\
&= -\frac{2}{4(u^2+v^2)+1}\begin{pmatrix}-2u\\2v\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit $h_{22} = -\frac{2}{4(u^2+v^2)+1}$ wird also

$$\Phi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \cdot \Phi_u + \Gamma_{22}^2 \cdot \Phi_v + h_{22} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v).$$

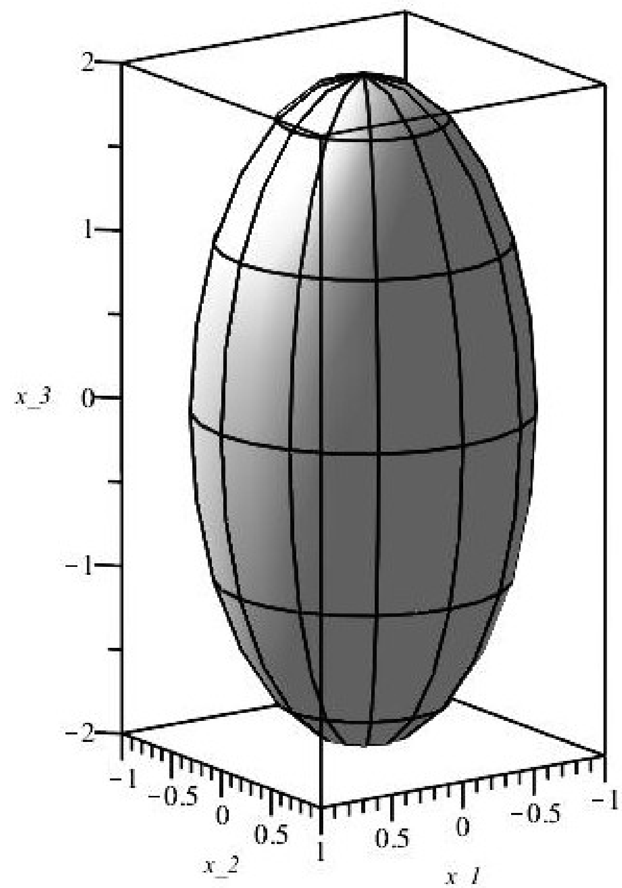
Hausaufgabe 8

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$,
wobei $\vartheta \in [0,\pi]$ und $\varphi \in [0,2\pi]$.

Dies parametrisiert ein Ellipsoid; vgl. Platzaufgabe 6.

Man bestimme die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} für $i,\ j,\ k\ \in \{1,2\}$.

Lösung.
Zunächst einmal eine Skizze des Ellipsoids:



Wir haben

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \Phi_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

und

$$\Phi_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \Phi_{\varphi\vartheta} = \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \Phi_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}\ .$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned}
E = \langle \Phi_\varphi | \Phi_\varphi \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \sin(\vartheta)^2 \sin(\varphi)^2 + \sin(\vartheta)^2 \cos(\varphi)^2 \\
&= \sin(\vartheta)^2 \cdot \big(\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2\big) \\
&= \sin(\vartheta)^2 \,, \\
F = \langle \Phi_\varphi | \Phi_\vartheta \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\cdot\cos(\vartheta)\cos(\varphi) + \sin(\vartheta)\cos(\varphi)\cdot\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\
&= 0 \,, \\
G = \langle \Phi_\vartheta | \Phi_\vartheta \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \cos(\vartheta)^2\cos(\varphi)^2 + \cos(\vartheta)^2\sin(\varphi)^2 + 4\sin(\vartheta)^2 \\
&= \cos(\vartheta)^2 \cdot \big(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\big) + 4\sin(\vartheta)^2 \\
&= \cos(\vartheta)^2 + 4\cdot\big(1-\cos(\vartheta)^2\big) \\
&= 4 - 3\cos(\vartheta)^2 \,.
\end{aligned}$$

Wir betrachten die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 4-3\cos(\vartheta)^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^{-2} & 0 \\ 0 & \big(4-3\cos(\vartheta)^2\big)^{-1} \end{pmatrix} .$$

Wir berechnen die Christoffelsymbole Γ_{11}^1 und Γ_{11}^2:

Es ist

$$\begin{array}{rclcl}
\frac{1}{2}E_\varphi &=& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\sin(\vartheta)^2 &=& 0 \\
F_\varphi - \frac{1}{2}E_\vartheta &=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}0 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\sin(\vartheta)^2 &=& -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \,.
\end{array}$$

Alternativ ist auch

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}E_\varphi = \langle \Phi_{\varphi\varphi} | \Phi_\varphi \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \sin(\vartheta)^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin(\vartheta)^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\
&= 0 \,, \\
F_\varphi - \tfrac{1}{2}E_\vartheta = \big\langle \Phi_{\varphi\varphi} \big| \Phi_\vartheta \big\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cos(\varphi)^2 - \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin(\varphi)^2 \\
&= -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cdot\big(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\big) \\
&= -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \,.
\end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\varphi \\ F_\varphi - \frac{1}{2}E_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^{-2} & 0 \\ 0 & \big(4-3\cos(\vartheta)^2\big)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}{4-3\cos(\vartheta)^2} \end{pmatrix} .$$

Somit ist $\Gamma_{11}^1 = 0$ und $\Gamma_{11}^2 = \frac{-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}{4-3\cos(\vartheta)^2}$.

Wir berechnen die Christoffelsymbole Γ_{12}^1 und Γ_{12}^2:

Es ist

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}E_\vartheta &=& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\sin(\vartheta)^2 &=& \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \\ \frac{1}{2}G_\varphi &=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(4-3\cos(\vartheta)^2) &=& 0\,. \end{array}$$

Alternativ ist auch

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}E_\vartheta &= \left\langle \Phi_{\varphi\vartheta} \middle| \Phi_\varphi \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\sin(\varphi)^2 + \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\cos(\varphi)^2 \\ &= \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\cdot\big(\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2\big) \\ &= \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\,, \\ \tfrac{1}{2}G_\varphi &= \left\langle \Phi_{\varphi\vartheta} \middle| \Phi_\vartheta \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\cos(\vartheta)^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \cos(\vartheta)^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\vartheta \\ \frac{1}{2}G_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^{-2} & 0 \\ 0 & \big(4-3\cos(\vartheta)^2\big)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\Gamma_{12}^1 = \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)}$ und $\Gamma_{12}^2 = 0$.

Wir berechnen die Christoffelsymbole Γ_{22}^1 und Γ_{22}^2:

Es ist

$$\begin{array}{rcl} F_\vartheta - \frac{1}{2}G_\varphi &=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}0 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(4-3\cos(\vartheta)^2) &=& 0 \\ \frac{1}{2}G_\vartheta &=& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}(4-3\cos(\vartheta)^2) &=& 3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\,. \end{array}$$

Alternativ ist auch

$$\begin{aligned} F_\vartheta - \tfrac{1}{2}G_\varphi &= \left\langle \Phi_{\vartheta\vartheta} \middle| \Phi_\varphi \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \sin(\vartheta)^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin(\vartheta)^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ &= 0\,, \\ \tfrac{1}{2}G_\vartheta &= \left\langle \Phi_{\vartheta\vartheta} \middle| \Phi_\vartheta \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cos(\varphi)^2 - \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin(\varphi)^2 + 4\cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \\ &= -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cdot\big(\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2\big) + 4\cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \\ &= 3\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,. \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_\vartheta - \frac{1}{2}G_\varphi \\ \frac{1}{2}G_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^{-2} & 0 \\ 0 & \big(4-3\cos(\vartheta)^2\big)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}{4-3\cos(\vartheta)^2} \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\Gamma_{22}^1 = 0$ und $\Gamma_{22}^2 = \frac{3\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}{4-3\cos(\vartheta)^2}$.