Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 5

Hausaufgabe 9
Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$ mit $\varphi,\, \psi \in [0, 2\pi]$ den Torus T; vgl. Hausaufgabe 5.

Sei $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$. Sei $c(\psi) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi \end{pmatrix}$ für $\psi \in [0, 2\pi]$.
Es parametrisiert $\Phi(c(\psi))$ die Kurve $K_{\varphi_0} := \Phi(c([0, 2\pi]))$ auf T.

Für welche Werte von φ_0 ist die Kurve K_{φ_0} eine Geodäte auf T?

Lösung.
Wir haben

$$c'(\psi) = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c''(\psi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aus Hausaufgabe 5.(c) wissen wir

$$\begin{aligned} E &= \langle \Phi_\varphi | \Phi_\varphi \rangle = 1 \\ F &= \langle \Phi_\varphi | \Phi_\psi \rangle = 0 \\ G &= \langle \Phi_\psi | \Phi_\psi \rangle = \big(2+\sin(\varphi)\big)^2 . \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\sin(\varphi))^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\sin(\varphi))^{-2} \end{pmatrix} ,$$

und

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\varphi \\ F_\varphi - \frac{1}{2}E_\psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\sin(\varphi))^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \\
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_\psi \\ \frac{1}{2}G_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\sin(\varphi))^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (2+\sin(\varphi))\cos(\varphi) \end{pmatrix} &= \frac{\cos(\varphi)}{2+\sin(\varphi)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \\
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_\psi - \frac{1}{2}G_\varphi \\ \frac{1}{2}G_\psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\sin(\varphi))^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(2+\sin(\varphi))\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} &= -(2+\sin(\varphi))\cos(\varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \end{pmatrix} = -(2+\sin(\varphi))\cos(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Gamma^2 &= \begin{pmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \frac{\cos(\varphi)}{2+\sin(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Allgemein haben wir für $a_{11}\,,\, a_{12}\,,\, a_{22} \in \mathbb{R}$

$$c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} c' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{22} .$$

Bei $\binom{\varphi}{\psi} = c(\psi) = \binom{\varphi_0}{\psi}$ ist also

$$\begin{aligned}
{c'}^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' &= \Gamma^1_{22} &&= -(2+\sin(\varphi_0))\cos(\varphi_0)\,,\\
{c'}^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' &= \Gamma^2_{22} &&= 0\,,\\
{c'}^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c' &= G &&= \big(2+\sin(\varphi_0)\big)^2\,,\\
{c'}^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'' &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &&= 0\,,\\
{c'}^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E_\varphi & F_\varphi\\ F_\varphi & G_\varphi\end{smallmatrix}\right) c' &= G_\varphi &&= 2(2+\sin(\varphi_0))\cos(\varphi_0)\,,\\
{c'}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_\psi & F_\psi\\ F_\psi & G_\psi\end{pmatrix} c' &= G_\psi &&= 0\,.
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Geodäten-Bedingung ergibt sich an der Stelle $c(\psi) = \binom{\varphi_0}{\psi}$

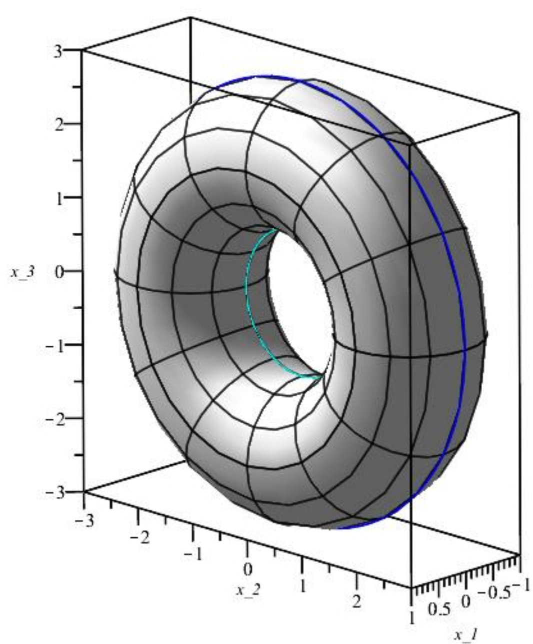
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &\overset{!}{=} c'' + \begin{pmatrix}{c'}^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c'\\ {c'}^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c'\end{pmatrix} - \frac{1}{{c'}^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'}\left({c'}^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right) c'' + \frac{1}{2}\cdot {c'}^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E_\varphi & F_\varphi\\ F_\varphi & G_\varphi\end{smallmatrix}\right) c'\cdot c_1' + \frac{1}{2}\cdot {c'}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_\psi & F_\psi\\ F_\psi & G_\psi\end{pmatrix} c'\cdot c_2'\right)\cdot c'\\
&= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-(2+\sin(\varphi_0))\cos(\varphi_0)\\ 0\end{pmatrix} - (2+\sin(\varphi_0))^{-2}\Big(0+\tfrac{1}{2}\cdot 2(2+\sin(\varphi_0))\cos(\varphi_0)\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot 0\cdot 1\Big)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-(2+\sin(\varphi_0))\cos(\varphi_0)\\ 0\end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

Diese Bedingung wird erfüllt, falls

$$-\underbrace{(2+\sin(\varphi_0))}_{\neq 0}\cos(\varphi_0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos(\varphi_0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi_0\in\Big\{\frac{\pi}{2}\,,\frac{3\pi}{2}\Big\}\,.$$

Also ist K_{φ_0} eine Geodäte für $\varphi_0 \in \left\{\frac{\pi}{2}\,,\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Eine Grafik mit dem Torus und den Geodäten $K_{\pi/2}$ (dunkelblau) und $K_{3\pi/2}$ (hellblau).



Hausaufgabe 10

Es parametrisiert $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2-v^2 \end{pmatrix}$ für $\binom{u}{v} \in D := \mathbb{R}^2$ ein hyperbolisches Paraboloid P.

(a) Sei $c(t) := \binom{t}{t}$ für $t \in I := \mathbb{R}$. Ist die Kurve $K_1 := \Phi(c(\mathbb{R}))$ eine Geodäte auf P?

(b) Sei $c(t) := \binom{t}{2t}$ für $t \in I := \mathbb{R}$. Ist die Kurve $K_2 := \Phi(c(\mathbb{R}))$ eine Geodäte auf P?

Lösung.
Aus Hausaufgabe 7.(b, c) wissen wir

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{4(u^2+v^2)+1} \begin{pmatrix} 4u & 0 \\ 0 & -4u \end{pmatrix} \\ \Gamma^2 &= \begin{pmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{4(u^2+v^2)+1} \begin{pmatrix} -4v & 0 \\ 0 & 4v \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8u & -4v \\ -4v & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4u \\ -4u & 8v \end{pmatrix} .$$

(a) Wir haben

$$c'(t) = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Allgemein haben wir für a_{11}, a_{12}, $a_{22} \in \mathbb{R}$

$$c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} c' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11} + 2a_{12} + a_{22} .$$

Bei $\binom{u}{v} = c(t) = \binom{t}{t}$ ist also

$$\begin{array}{lclcll} c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' &=& \Gamma^1_{11} + 2\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{22} &=& \frac{1}{4(t^2+t^2)+1}(4t-4t) &= 0 , \\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' &=& \Gamma^2_{11} + 2\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{22} &=& \frac{1}{4(t^2+t^2)+1}(-4t+4t) &= 0 , \\ c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c' &=& E + 2F + G &=& 1 + 4t^2 - 8t \cdot t + 1 + 4t^2 &= 2 , \\ c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' &=& \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &&&= 0 , \\ c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' &=& E_u + 2F_u + G_u &=& 8t + 2 \cdot (-4t) &= 0 , \\ c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' &=& E_v + 2F_v + G_v &=& 2 \cdot (-4t) + 8t &= 0 . \end{array}$$

Eingesetzt in die Geodäten-Bedingung ergibt sich an der Stelle $c(t) = \binom{t}{t}$

$$\begin{aligned} & c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' + \frac{1}{2} \cdot c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' \cdot c_1' + \frac{1}{2} \cdot c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' \cdot c_2' \right) \cdot c' \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\left(0 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Also ist K_1 eine Geodäte auf P.

(b) Wir haben

$$c'(t) = \binom{c_1'}{c_2'} = \binom{1}{2} \quad \text{und} \quad c''(t) = \binom{0}{0} .$$

Allgemein haben wir für a_{11}, a_{12}, $a_{22} \in \mathbb{R}$

$$c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} c' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \binom{1}{2} = a_{11} + 4a_{12} + 4a_{22} .$$

Bei $\binom{u}{v} = c(t) = \binom{t}{2t}$ ist also

$$\begin{array}{lclclcl}
c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' & = & \Gamma^1_{11} + 4\Gamma^1_{12} + 4\Gamma^1_{22} & = & \frac{-12t}{4(t^2+(2t)^2)+1} & = & \frac{-12t}{20t^2+1} , \\
c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' & = & \Gamma^2_{11} + 4\Gamma^2_{12} + 4\Gamma^2_{22} & = & \frac{12\cdot(2t)}{4(t^2+(2t)^2)+1} & = & \frac{24t}{20t^2+1} , \\
c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c' & = & E + 4F + 4G & = & (1+4t^2) + 4(-4t\cdot(2t)) + 4(1+4(2t)^2) & = & 36t^2 + 5 , \\
c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \binom{0}{0} & & & = & 0 , \\
c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' & = & E_u + 4F_u + 4G_u & = & 8t + 4(-4(2t)) & = & -24t , \\
c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' & = & E_v + 4F_v + 4G_v & = & 4(-4t) + 4\cdot 8(2t) & = & 48t .
\end{array}$$

Eingesetzt in die Geodäten-Bedingung ergibt sich an der Stelle $c(t) = \binom{t}{2t}$

$$\begin{aligned}
\binom{0}{0} &\overset{!}{=} c'' + \begin{pmatrix} c'^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' \\ c'^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} - \frac{1}{c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'} \left(c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' + \frac{1}{2} \cdot c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' \cdot c_1' + \frac{1}{2} \cdot c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' \cdot c_2' \right) \cdot c' \\
&= \binom{0}{0} + \frac{12t}{20t^2+1} \binom{-1}{2} - \frac{1}{36t^2+5} \left(0 + \tfrac{1}{2} \cdot (-24t) \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 48t \cdot 2 \right) \cdot \binom{1}{2} \\
&= \frac{12t}{20t^2+1} \binom{-1}{2} + \frac{36t}{36t^2+5} \binom{1}{2} .
\end{aligned}$$

Zum Beispiel für $t = 1$ ergibt sich hier nicht das Ergebnis $\binom{0}{0}$, da die linear unabhängigen Vektoren $\binom{-1}{2}$ und $\binom{1}{2}$ Koeffizienten ungleich 0 aufweisen.

Also ergibt sich nicht für alle $t \in I$ das Ergebnis $\binom{0}{0}$.

Somit ist K_2 keine Geodäte auf P.

Eine Grafik mit dem hyperbolischen Paraboloid, der Geodäte K_1 (blau) und der Kurve K_2 (rot).