Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 6

Hausaufgabe 11
Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$ mit $\varphi,\ \psi\ \in\ [0,2\pi]$ einen Torus T.
Vgl. Hausaufgaben 5, 9.

(a) Man bestimme die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ an jedem Punkt von T.

(b) An welchen Stellen wird $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ maximal? An welchen Stellen wird $K_{\text{Gauß}}$ minimal?

Lösung.

(a) Aus Hausaufgabe 5 wissen wir

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\psi)\cos(\varphi) \\ \sin(\psi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad , \quad \Phi_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

und

$$E = 1 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = (2+\sin(\varphi))^2 \,.$$

Wir haben

$$\Phi_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\cos(\psi)\sin(\varphi) \\ -\sin(\psi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad , \quad \Phi_{\varphi\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\psi)\cos(\varphi) \\ \cos(\psi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad , \quad \Phi_{\psi\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ -\sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

und

$$\Phi_\varphi \times \Phi_\psi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ \cos(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix} .$$

Ferner haben wir

$$\frac{1}{EG-F^2} = \frac{1}{(2+\sin(\varphi))^2}$$

und

$$\begin{aligned}
\left\langle \Phi_{\varphi\varphi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\psi \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\cos(\psi)\sin(\varphi) \\ -\sin(\psi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ \cos(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -\cos(\varphi)^2(2+\sin(\varphi)) - \cos(\psi)^2\sin(\varphi)^2(2+\sin(\varphi)) - \sin(\psi)^2\sin(\varphi)^2(2+\sin(\varphi)) \\
&= -(2+\sin(\varphi))\big(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\cdot(\cos(\psi)^2+\sin(\psi)^2)\big) \\
&= -(2+\sin(\varphi))\big(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\big) \\
&= -(2+\sin(\varphi))
\end{aligned}$$

$$\left\langle \Phi_{\varphi\psi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\psi \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\psi)\cos(\varphi) \\ \cos(\psi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ \cos(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\begin{aligned} &= -\sin(\psi)\cos(\varphi)\cos(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ &\quad + \cos(\psi)\cos(\varphi)\sin(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\left\langle \Phi_{\psi\psi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\psi \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ -\sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ \cos(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\begin{aligned} &= -\cos(\psi)^2\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi))^2 - \sin(\psi)^2\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi))^2 \\ &= -\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi))^2 . \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} h_{11} &= \tfrac{1}{EG-F^2}\left\langle \Phi_{\varphi\varphi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\psi \right\rangle = \tfrac{1}{(2+\sin(\varphi))^2} \cdot \big(-(2+\sin(\varphi))\big) = -\tfrac{1}{2+\sin(\varphi)} \\ h_{12} &= \tfrac{1}{EG-F^2}\left\langle \Phi_{\varphi\psi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\psi \right\rangle = \tfrac{1}{(2+\sin(\varphi))^2} \cdot 0 = 0 \\ h_{22} &= \tfrac{1}{EG-F^2}\left\langle \Phi_{\psi\psi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\psi \right\rangle = \tfrac{1}{(2+\sin(\varphi))^2} \cdot (-\sin(\varphi))(2+\sin(\varphi))^2 = -\sin(\varphi) . \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = -\frac{1}{2+\sin(\varphi)}(-\sin(\varphi)) - 0^2 = \frac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)} .$$

(b) Wir suchen die globalen Extremstellen von $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$.

Es ist

$$0 \overset{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\mathrm{K}_{\text{Gauß}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)}\right) = \frac{\cos(\varphi)(2+\sin(\varphi)) - \sin(\varphi)\cos(\varphi)}{(2+\sin(\varphi))^2} = \frac{2\cos(\varphi)}{\underbrace{(2+\sin(\varphi))^2}_{\neq 0}} .$$

Also sollte bei den kritischen Stellen $2\cos(\varphi) \overset{!}{=} 0$ sein. Diese liegen also bei $\varphi \overset{!}{\in} \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ vor.

Wir setzen diese Werte in $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ ein.

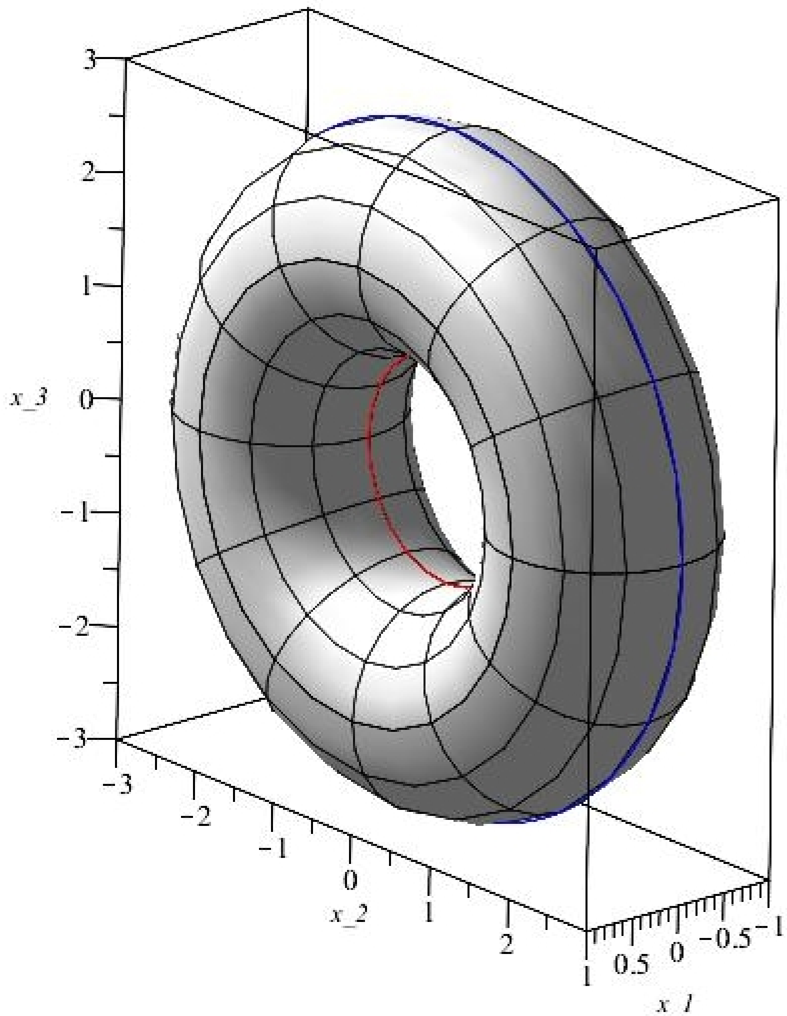
Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sin(\pi/2)}{2+\sin(\pi/2)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \\ \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \frac{\sin(3\pi/2)}{2+\sin(3\pi/2)} = \frac{-1}{2-1} = -1 . \end{aligned}$$

Dazuhin ist an den Randstellen $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}(0) = \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(2\pi) = \frac{0}{2^2} = 0$.

Also nimmt die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ an den Stellen $\binom{\varphi}{\psi} = \binom{\frac{\pi}{2}}{\psi}$ ihr Maximum an, und an den Stellen $\binom{\varphi}{\psi} = \binom{\frac{3\pi}{2}}{\psi}$ ihr Minimum, wobei $\psi \in [0, 2\pi]$.

Eine Grafik mit dem Torus T, der von $\Phi(\pi/2, \psi)$ parametrisierten Kurve (blau), auf der sich die Punkte mit maximaler Gaußkrümmung von T befinden, und der von $\Phi(3\pi/2, \psi)$ parametrisierten Kurve (rot), auf der sich die Punkte mit minimaler Gaußkrümmung von T befinden.



Hausaufgabe 12

Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ ein Ellipsoid S, wobei $\vartheta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Vgl. Hausaufgabe 8.

(a) Man bestimme die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ an jedem Punkt von S.

(b) An welchen Stellen wird $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$ maximal? An welchen Stellen wird $K_{\text{Gauß}}$ minimal?

Lösung.

(a) Aus Hausaufgabe 8 wissen wir

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\sin(\vartheta) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\varphi\vartheta} = \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\cos(\vartheta) \end{pmatrix},$$

und

$$E = \sin(\vartheta)^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 4 - 3\cos(\vartheta)^2 .$$

Wir haben

$$\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta = \begin{pmatrix} -2\cos(\varphi)\sin(\vartheta)^2 \\ -2\sin(\varphi)\sin(\vartheta)^2 \\ -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} .$$

Ferner haben wir

$$\frac{1}{EG - F^2} = \frac{1}{\sin(\vartheta)^2(4 - 3\cos(\vartheta)^2)}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\varphi\varphi} | \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2\cos(\varphi)\sin(\vartheta)^2 \\ -2\sin(\varphi)\sin(\vartheta)^2 \\ -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2\sin(\vartheta)^3\cos(\varphi)^2 + 2\sin(\vartheta)^3\sin(\varphi)^2 \\ &= 2\sin(\vartheta)^3 \cdot (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \\ &= 2\sin(\vartheta)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\varphi\vartheta} | \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2\cos(\varphi)\sin(\vartheta)^2 \\ -2\sin(\varphi)\sin(\vartheta)^2 \\ -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\vartheta)^2 - 2\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\sin(\vartheta)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\vartheta\vartheta} | \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -2\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2\cos(\varphi)\sin(\vartheta)^2 \\ -2\sin(\varphi)\sin(\vartheta)^2 \\ -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2\sin(\vartheta)^3\cos(\varphi)^2 + 2\sin(\vartheta)^3\sin(\varphi)^2 + 2\cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta) \\ &= 2\sin(\vartheta)^3 \cdot (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) + 2\cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta) \\ &= 2\sin(\vartheta) \cdot (\sin(\vartheta)^2 + \cos(\vartheta)^2) \\ &= 2\sin(\vartheta) . \end{aligned}$$

Also ist

$$h_{11} = \tfrac{1}{EG-F^2}\left\langle \Phi_{\varphi\varphi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \right\rangle = \tfrac{1}{\sin(\vartheta)^2(4-3\cos(\vartheta)^2)} \cdot 2\sin(\vartheta)^3 = \tfrac{2\sin(\vartheta)}{(4-3\cos(\vartheta)^2)}$$
$$h_{12} = \tfrac{1}{EG-F^2}\left\langle \Phi_{\varphi\vartheta} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \right\rangle = \tfrac{1}{\sin(\vartheta)^2(4-3\cos(\vartheta)^2)} \cdot 0 = 0$$
$$h_{22} = \tfrac{1}{EG-F^2}\left\langle \Phi_{\vartheta\vartheta} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \right\rangle = \tfrac{1}{\sin(\vartheta)^2(4-3\cos(\vartheta)^2)} \cdot 2\sin(\vartheta) = \tfrac{2}{\sin(\vartheta)(4-3\cos(\vartheta)^2)}\,.$$

Insgesamt ist also

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = \tfrac{2\sin(\vartheta)}{(4-3\cos(\vartheta)^2)}\,\tfrac{2}{\sin(\vartheta)(4-3\cos(\vartheta)^2)} = \tfrac{4}{(4-3\cos(\vartheta)^2)^2}\,.$$

(b) Wir suchen die globalen Extremstellen von $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$.

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist $\cos(\vartheta)^2 = 0$ minimal und also $\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \frac{4}{(4-3\cdot 0)^2} = \frac{1}{4}$ minimal.

Dieses Minimum wird an den Stellen $\left(\begin{smallmatrix}\varphi\\ \frac{\pi}{2}\end{smallmatrix}\right)$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ angenommen, d.h. an den Punkten der Form $\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}$ auf S.

Für $\vartheta = 0$ und für $\vartheta = \pi$ ist $\cos(\vartheta)^2 = 1$ maximal und also $\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \frac{4}{(4-3\cdot 1)^2} = 4$ maximal.

Dieses Maximum wird an den Stellen $\left(\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}0\\ \pi\end{smallmatrix}\right)$ angenommen, d.h. an den Punkten $\left(\begin{smallmatrix}0\\ 0\\ 2\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}0\\ 0\\ -2\end{smallmatrix}\right)$ auf S.

Eine Grafik mit dem Ellipsoid S, den Punkten

$$\left(\begin{smallmatrix}0\\ 0\\ 2\end{smallmatrix}\right) \text{ (dunkelblau) und } \left(\begin{smallmatrix}0\\ 0\\ -2\end{smallmatrix}\right) \text{ (hellblau)}$$

mit maximaler Gaußkrümmung von S und den Punkten

$$\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\\ 0\end{pmatrix} \text{ (rot)}$$

mit minimaler Gaußkrümmung von S, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$.