Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 7

Hausaufgabe 13

Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$ mit $\varphi,\, \psi \in [0, 2\pi]$ einen Torus T.
Vgl. Hausaufgaben 5, 9, 11.

Sei $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$. Sei $c(\psi) := \binom{\varphi_0}{\psi}$ für $\psi \in [0, 2\pi]$.

Wir betrachten die Kurve K, die durch $C(\psi) := \Phi(c(\psi))$ parametrisiert wird.

(a) Man skizziere T und darauf die Kurve K.

(b) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ die Krümmung κ von K durch eine geometrische Überlegung.

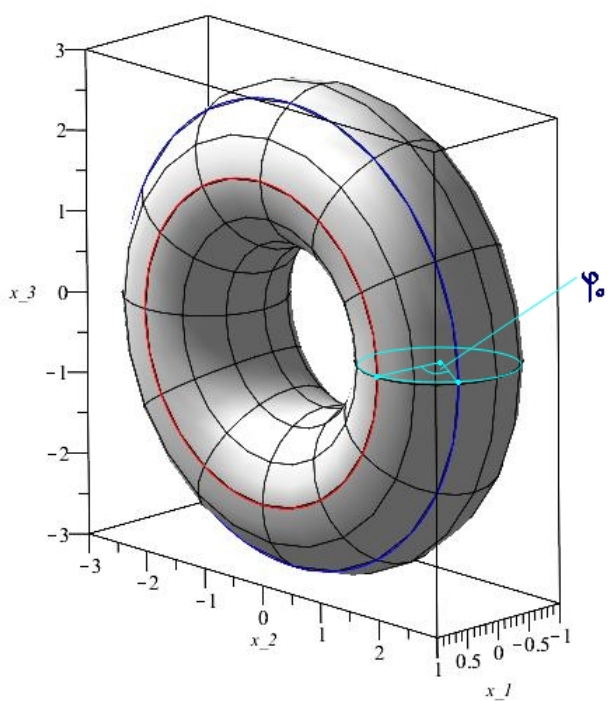
(c) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ den Wert von $\cos(\nu)$ für den Winkel ν zwischen dem Normalenvektor n von K und dem Vektor $\mathfrak{n} = \Phi_\varphi \times \Phi_\psi$ senkrecht auf T durch eine geometrische Überlegung.

(d) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ den Wert von $\kappa \cdot \cos(\nu)$ unter Verwendung von E, F, G, L, M, N.

Man vergleiche mit (b) und (c).

Lösung.

(a) Eine Grafik mit dem Torus T, einer Kurve K_1 mit $\varphi_0 = 0$ (rot) und einer Kurve K_2 in Abhängigkeit von φ_0 (blau).



(b) Es ist $\Phi(c(\psi)) = \Phi(\varphi_0, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi_0)) \\ \sin(\psi)(2+\sin(\varphi_0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (2+\sin(\varphi_0)) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix}$.

Also ist die Kurve K ein Kreis mit Radius $\rho = 2 + \sin(\varphi_0)$.

Also ist die Krümmung in jedem Punkt auf K, und insbesondere im Punkt $\Phi(c(0))$, gegeben durch

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2+\sin(\varphi_0)}\,.$$

(c) Zunächst haben wir an der Stelle $c(0) = \binom{\varphi_0}{0}$ den Vektor

$$\mathfrak{n} \;=\; \Phi_\varphi(\varphi_0, 0) \times \Phi_\psi(\varphi_0, 0) \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_0) \\ \cos(\varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2+\sin(\varphi_0) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0)(2+\sin(\varphi_0)) \\ \sin(\varphi_0)(2+\sin(\varphi_0)) \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

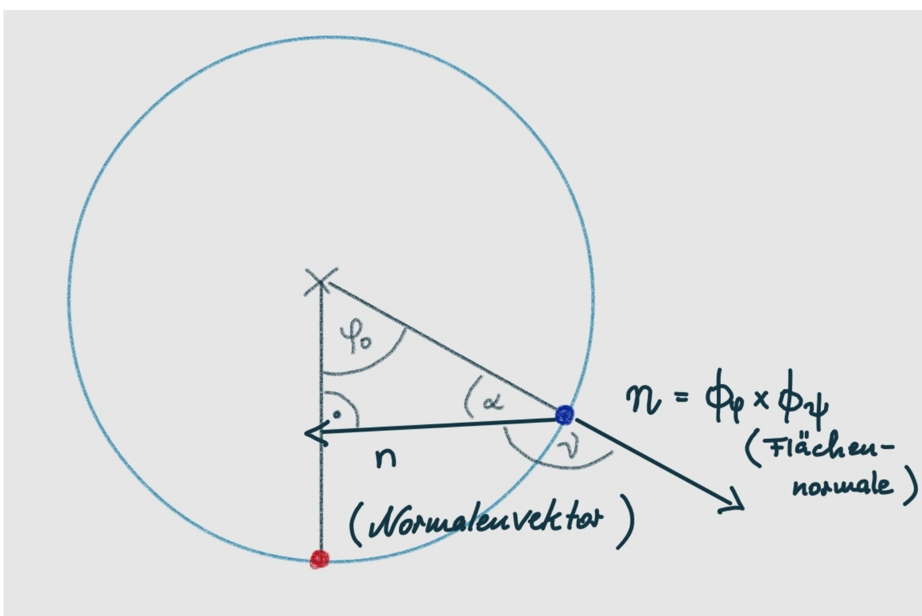
Wir wollen klären, ob $\mathfrak{n}$, angesetzt am Punkt $\Phi(c(0)) \in T$, nach innen oder nach außen zeigt.

Als Vektor vom Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(0)\cdot 2 \\ \sin(0)\cdot 2 \end{pmatrix}$ auf dem Inkreis zum Punkt $\Phi(c(0)) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0) \\ \cos(0)(2+\sin(\varphi_0)) \\ \sin(0)(2+\sin(\varphi_0)) \end{pmatrix}$ auf dem Torus erhalten wir den Vektor

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi_0) \\ 2+\sin(\varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0) \\ \sin(\varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2+\sin(\varphi_0)}\,\mathfrak{n}\,.$$

Angesetzt am Punkt $\Phi(c(0))$ auf dem Torus zeigt der Vektor $\mathfrak{n}$ nach außen, da $\frac{1}{2+\sin(\varphi_0)} > 0$.

Wir betrachten eine Skizze des Querschnitts des Torus T aus der obigen Grafik in (a).



Die Winkel α und ν bilden einen gestreckten Winkel. Also ist

$$\pi = \alpha + \nu\,.$$

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt π. Also ist

$$\pi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2} + \alpha\,.$$

Daraus folgt
$$\nu = \pi - \alpha = \pi - \left(\pi - \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\,.$$
Es wird
$$\cos(\nu) = \cos\bigl(\varphi_0 + \tfrac{\pi}{2}\bigr) = \cos(\varphi_0)\cos(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(\varphi_0)\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\varphi_0)\,.$$

(d) Aus Hausaufgabe 11.(a) wissen wir
$$E = 1 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = (2+\sin(\varphi))^2$$
und
$$\begin{aligned} h_{11} &= \tfrac{1}{EG-F^2}\left\langle \Phi_{\varphi\varphi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\psi \right\rangle = \tfrac{-1}{2+\sin(\varphi)} \\ h_{12} &= \tfrac{1}{EG-F^2}\left\langle \Phi_{\varphi\psi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\psi \right\rangle = 0 \\ h_{22} &= \tfrac{1}{EG-F^2}\left\langle \Phi_{\psi\psi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\psi \right\rangle = -\sin(\varphi)\,. \end{aligned}$$
Wir haben
$$c' = c'(\psi) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\,.$$
An der Stelle $c(0) = \left(\begin{smallmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist also
$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\sin(\varphi_0))^2 \end{pmatrix} \\ \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) &= \sqrt{EG-F^2}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = (2+\sin(\varphi_0))\begin{pmatrix} \frac{-1}{2+\sin(\varphi_0)} & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi_0)(2+\sin(\varphi_0)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
und somit
$$\begin{aligned} c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)c' &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\sin(\varphi_0))^2 \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = (2+\sin(\varphi))^2 \\ c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)c' &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi_0)(2+\sin(\varphi_0)) \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -\sin(\varphi_0)(2+\sin(\varphi_0))\,. \end{aligned}$$
Also haben wir dort
$$\kappa\cdot\cos(\nu) = \frac{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)c'}{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)c'} = \frac{-\sin(\varphi_0)(2+\sin(\varphi_0))}{(2+\sin(\varphi_0))^2} = \frac{-\sin(\varphi_0)}{2+\sin(\varphi_0)}\,.$$
Teilt man diese Gleichung auf beiden Seiten durch $\kappa \overset{(b)}{=} \frac{1}{2+\sin(\varphi_0)}$, so ergibt sich
$$\cos(\nu) = -\sin(\varphi_0)\,,$$
was wir bereits in (c) gezeigt haben.

Hausaufgabe 14

Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ ein Ellipsoid S, wobei $\vartheta \in [0,\pi]$ und $\varphi \in [0,2\pi]$.
Vgl. Hausaufgaben 8, 12.
Sei $c(\varphi) := \binom{\varphi}{\pi/4}$ für $\varphi \in [0,2\pi]$.

Wir betrachten die Kurve K, die durch $C(\varphi) := \Phi(c(\varphi))$ parametrisiert wird.

(a) Man skizziere S und darauf die Kurve K.

(b) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ die Krümmung κ von K durch eine geometrische Überlegung.

(c) Wir betrachten im Punkt $\Phi(c(0))$ den Winkel ν zwischen dem Normalenvektor n von K und dem Vektor $\mathfrak{n} = \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta$ senkrecht auf S.

Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ den Wert von $\kappa \cdot \cos(\nu)$ unter Verwendung von E, F, G, L, M, N.

Man bestimme in diesem Punkt nun $\cos(\nu)$ unter Verwendung von (b).

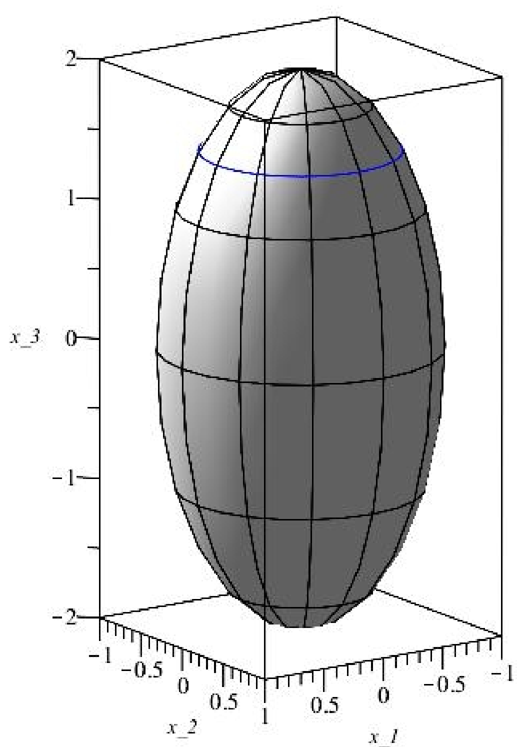
Lösung.

(a) Wir haben

$$C(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\pi/4)\cos(\varphi) \\ \sin(\pi/4)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Also ist die Kurve K der Kreis auf dem Ellipsoid in der Höhe $\sqrt{2}$, mit Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Eine Grafik des Ellipsoids S und der Kurve K (blau).



(b) Die Kurve K ist ein Kreis mit Radius $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Also ist die Krümmung in jedem Punkt auf K, und insbesondere im Punkt $\Phi(c(0))$, gegeben durch

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \sqrt{2}\,.$$

(c) Aus Hausaufgabe 12.(a) wissen wir

$$E = \sin(\vartheta)^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 4 - 3\cos(\varphi)^2$$

und

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \left\langle \Phi_{\varphi\varphi} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \right\rangle = \tfrac{2\sin(\vartheta)}{4-3\cos(\vartheta)^2} \\
h_{12} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \left\langle \Phi_{\varphi\vartheta} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \right\rangle = 0 \\
h_{22} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \left\langle \Phi_{\vartheta\vartheta} \middle| \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta \right\rangle = \tfrac{2}{\sin(\vartheta)(4-3\cos(\vartheta)^2)}\,.
\end{aligned}$$

Wir haben

$$c' = c'(\varphi) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\,.$$

An der Stelle $c(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pi/4 \end{smallmatrix}\right)$ ist also

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \sin(\pi/4)^2 & 0 \\ 0 & 4-3\cos(\pi/4)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\
\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) &= \sqrt{EG-F^2} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = \sqrt{\sin(\pi/4)^2(4-3\cos(\pi/4)^2)} \begin{pmatrix} \frac{2\sin(\pi/4)}{4-3\cos(\pi/4)^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sin(\pi/4)(4-3\cos(\pi/4)^2)} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{pmatrix} = \sqrt{\tfrac{2}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,,
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c' &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{2} \\
c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) c' &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \sqrt{\tfrac{2}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \sqrt{\tfrac{2}{5}}\,.
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\kappa \cdot \cos(\nu) = \frac{c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) c'}{c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'} = \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\tfrac{2}{5}}\,.$$

Schließlich ist nun

$$\cos(\nu) = \frac{2\sqrt{\frac{2}{5}}}{\kappa} \overset{\text{(b)}}{=} \frac{2\sqrt{\frac{2}{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$