Künzer, Truong Wintersemester 2022/23

Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 8

Hausaufgabe 15

Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$ mit $\varphi,\,\psi\,\in\,[-\pi,\pi]$ einen Torus T.

Vgl. Hausaufgaben 5, 9, 11, 13.

(a) Man bestimme für jeden Punkt von T die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsvektoren.

(b) Wo liegen die Punkte auf T mit Hauptkrümmungen von verschiedenem Vorzeichen? Welches Vorzeichen hat dort die Gaußsche Krümmung?

(c) Wir betrachten die Stelle $\binom{\varphi}{\psi} = \binom{\pi/2}{0}$.

Man parametrisiere Kurven auf T, welche durch $\Phi(\frac{\pi}{2},0)$ laufen und welche die Hauptkrümmungen bis auf Vorzeichen an dieser Stelle als Krümmungen haben.

Man skizziere T mit beiden Kurven darin.

Man berechne deren Krümmung an dieser Stelle direkt und vergleiche.

Lösung.

(a) Aus Hausaufgabe 13(d) wissen wir

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\sin(\varphi))^2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}.$$

Also ist die Weingarten-Matrix an der Stelle $\binom{\varphi}{\psi}$ gegeben durch

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\sin(\varphi))^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix W hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -\frac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)}$ und zuhörige Eigenvektoren $v_1 = \binom{1}{0}$ und $v_2 = \binom{0}{1}$.

Also hat jeder Punkt $\binom{\varphi}{\psi}$ auf T die Hauptkrümmungen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -\frac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)}$ und Hauptkrümmungsvektoren $v_1 = \binom{1}{0}$ und $v_2 = \binom{0}{1}$.

(b) Zu finden sind die Stellen auf T mit $\lambda_1\lambda_2 \overset{!}{<} 0$.

Wir haben

$$\lambda_1\lambda_2 = -1\cdot\left(-\frac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)}\right) = \frac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)} \overset{!}{<} 0\,.$$

Also

$$\sin(\varphi) \overset{!}{<} 0 \quad\Rightarrow\quad \varphi \overset{!}{\in} (-\pi,0)\,.$$

Somit sind $\binom{\varphi}{\psi}$ mit $\varphi \in (-\pi, 0)$ die gesuchten Stellen.

Für die Gaußsche Krümmung gilt: $\mathrm{K}_{\mathrm{Gauß}} = \lambda_1 \lambda_2$. Also ist $\mathrm{K}_{\mathrm{Gauß}} < 0$ an jeder Stelle $\binom{\varphi}{\psi}$ mit $\varphi \in (-\pi, 0)$.

Zum Vergleich: Aus Hausaufgabe 11 kennen wir die Gaußsche Krümmung bei $\binom{\varphi}{\psi}$:

$$\mathrm{K}_{\mathrm{Gauß}} = \tfrac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)}\,.$$

Dies bestätigt nochmals den Zusammenhang von Gaußscher Krümmung und Hauptkrümmungen.

(c) Sei $P_0 := \Phi\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir verwenden Kurven wie in der Definition der Weingarten-Matrix in §3.2.2 beschrieben, sogenannte Normalschnitte. Wählt man für einen solchen Normalschnitt eine Parametrisierung $c : I \to D$, für welche c' an der betrachteten Stelle eine Hauptkrümmungsrichtung ist, dann hat die resultierende Kurve, die von $\Phi \circ c$ parametrisiert wird, dort die zugehörige Hauptkrümmung als Krümmung.

Diese Normalschnitte sind gerade die Kreise auf T, die man durch Konstanthalten von ψ resp. von φ erhält:

Sei $c_{(1)}(\varphi) := \binom{\varphi}{0}$ mit $\varphi \in [-\pi, \pi]$ eine Parametrisierung.

Wir zeigen, dass $c'_{(1)}$ ein Hauptkrümmungsvektor bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist.

Wir haben

$$c'_{(1)} = \binom{1}{0} = v_1\,.$$

Also ist $c'_{(1)}$ ein Hauptkrümmungsvektor bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Sei $K_{(1)}$ die Kurve auf T, die durch

$$C_{(1)}(\varphi) := \Phi\left(c_{(1)}(\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 2+\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird.

Wir zeigen, dass $K_{(1)}$ ein Normalschnitt von T in P_0 ist.

An der Stelle $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird

$$C_{(1)}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = P_0\,.$$

Also verläuft $K_{(1)}$ durch den Punkt P_0.

Wir betrachten die x_1-x_2-Ebene $E_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}$.

Wir haben

$$\mathfrak{n} := \Phi_\varphi\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) \times \Phi_\psi\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Die Ebene $E_{(1)}$ enthält den Punkt $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Gerade

$$\{P_0 + r\mathfrak{n} \colon r \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3+3r \\ 0 \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ferner enthält $E_{(1)}$ die Kurve $K_{(1)}$. Also ist insbesondere $K_{(1)} \subseteq T \cap E_{(1)}$.

Somit ist $K_{(1)}$ ein Normalschnitt von T in P_0.

Mit diesen beiden Eigenschaften gilt dann

$$\lambda_1 = \kappa \cdot \underbrace{\cos(\nu)}_{\pm 1}.$$

Also stimmt für die Hauptkrümmung λ_1 bis auf Vorzeichen mit der Krümmung κ an der betrachteten Stelle überein.

Wir verifizieren dieses Ergebnis an der Stelle $\binom{\pi/2}{0}$ *mit einer direkten Rechnung.*

Die Kurve $K_{(1)}$ ist ein Kreis mit Radius $\rho = 1$.

An der Stelle $\binom{\pi/2}{0}$ ist die Krümmung also gegeben durch

$$\kappa = \tfrac{1}{\rho} = 1.$$

Die Hauptkrümmung zum Hauptkrümmungsvektor $\binom{1}{0}$ ist gegeben durch

$$\lambda_1 = -1.$$

Dies zeigt, dass κ und λ_1 bis auf Vorzeichen übereinstimmen.

Sei $c_{(2)}(\psi) := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \psi \end{pmatrix}$ mit $\psi \in [-\pi, \pi]$ eine Parametrisierung.

Wir zeigen, dass $c'_{(2)}$ *ein Hauptkrümmungsvektor bei* $\psi = 0$ *ist.*

Wir haben

$$c'_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2.$$

Also ist $c'_{(2)}$ ein Hauptkrümmungsvektor bei $\psi = 0$.

Sei $K_{(2)}$ die Kurve auf T, die durch

$$K_{(2)} := \Phi\left(c_{(2)}(\psi)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos(\psi) \\ 3\cos(\psi) \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird.

Wir zeigen, dass $K_{(2)}$ *ein Normalschnitt von* T *in* P_0 *ist.*

An der Stelle $\psi = 0$ wird

$$C_{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = P_0.$$

Also verläuft $K_{(2)}$ durch den Punkt P_0.

Wir betrachten die x_2-x_3-Ebene $E_{(2)} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = 0 \right\}$.

Wir haben wieder

$$\mathfrak{n} = \Phi_\varphi\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) \times \Phi_\psi\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Ebene $E_{(2)}$ enthält den Punkt $P_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und die Gerade

$$\{P_0 + r\mathfrak{n} \colon r \in \mathbb{R}\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3+3r \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : r \in \mathbb{R} \right\} .$$

Ferner enthält $E_{(2)}$ die Kurve $K_{(2)}$. Also ist insbesondere $K_{(2)} \subseteq T \cap E_{(2)}$.

Somit ist $K_{(2)}$ ein Normalschnitt von T in P_0.

Mit diesen beiden Eigenschaften gilt dann

$$\lambda_2 = \kappa \cdot \underbrace{\cos(\nu)}_{\pm 1} .$$

Also stimmt die Hauptkrümmung λ_2 bis auf Vorzeichen mit der Krümmung κ an der betrachteten Stelle überein.

Wir verifizieren dieses Ergebnis an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ *mit einer direkten Rechnung.*

Die Kurve $K_{(2)}$ ist ein Kreis mit Radius $\rho = 3$.

An der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist die Krümmung also gegeben durch

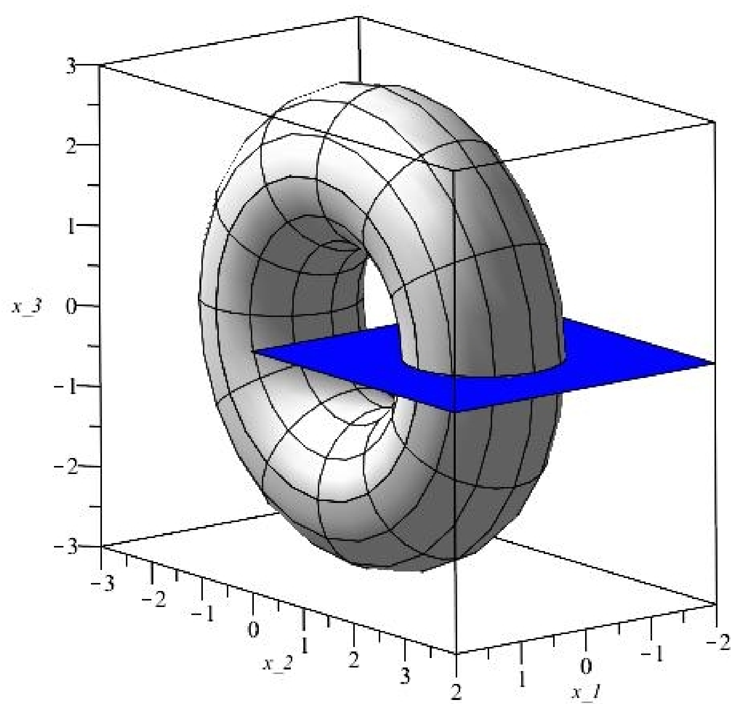
$$\kappa = \tfrac{1}{\rho} = \tfrac{1}{3} .$$

Die Hauptkrümmung zum Hauptkrümmungsvektor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist gegeben durch

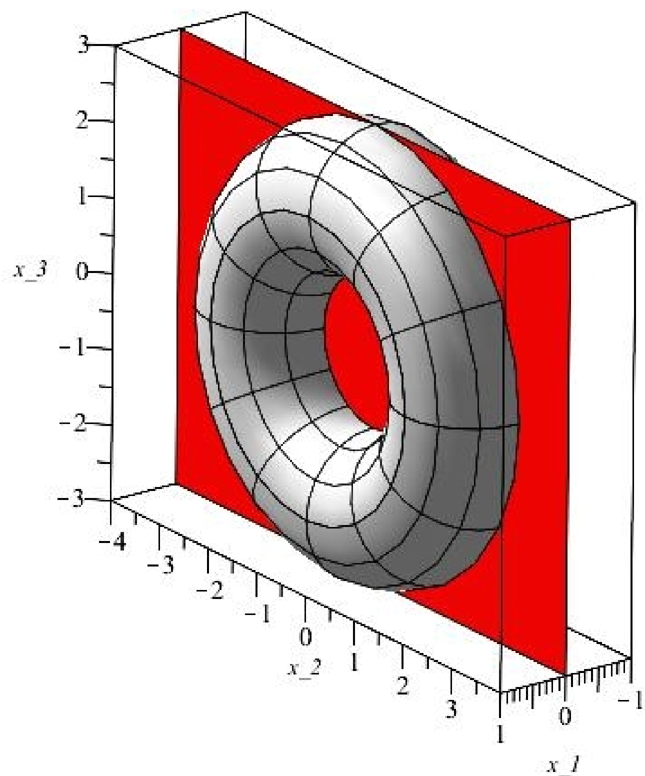
$$\lambda_2 = -\tfrac{\sin(\pi/2)}{2+\sin(\pi/2)} = -\tfrac{1}{3} .$$

Dies zeigt, dass κ und λ_2 bis auf Vorzeichen übereinstimmen.

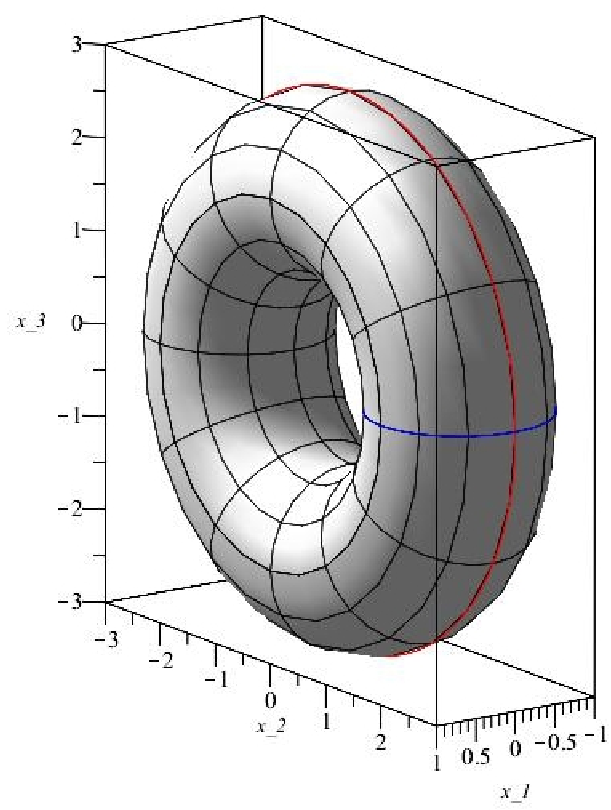
Eine Grafik mit dem Torus T und der x_1-x_2-Ebene $E_{(1)}$ (blau).



Eine Grafik mit dem Torus T und der x_2-x_3-Ebene $E_{(2)}$ (rot).



Eine Grafik mit dem Torus T und den Kurven $K_{(1)}$ (blau) und $K_{(2)}$ (rot).



Hausaufgabe 16

Es parametrisiert $\Phi(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ u^2-v^2 \end{smallmatrix}\right)$ für $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in D := \mathbb{R}^2$ ein hyperbolisches Paraboloid P.
Vgl. Hausaufgaben 7, 10.

(a) Man bestimme an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Hauptkrümmungen.

Man parametrisiere Kurven auf P, welche durch $\Phi(0,0)$ laufen und welche die Hauptkrümmungen bis auf Vorzeichen an dieser Stelle als Krümmungen haben.

Man skizziere P mit beiden Kurven darin.

Man berechne deren Krümmung an dieser Stelle direkt und vergleiche.

(b) Man bestimme an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Hauptkrümmungen und zugehörige Hauptkrümmungsvektoren.

Lösung.
Aus Hausaufgabe 7 wissen wir

$$\begin{aligned} \Phi_u &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{smallmatrix}\right), & \Phi_v &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{smallmatrix}\right) \\ \Phi_{uu} &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), & \Phi_{uv} &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & \Phi_{vv} &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right), \end{aligned}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{smallmatrix}\right)$$

und

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{4(u^2+v^2)+1} \left(\begin{smallmatrix} 1+4v^2 & 4uv \\ 4uv & 1+4u^2 \end{smallmatrix}\right).$$

Wir berechnen L, M und N an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$.
Wir haben

$$\Phi_u \times \Phi_v = \left(\begin{smallmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

und

$$EG - F^2 = 4(u^2+v^2) + 1\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} h_{11} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \left\langle \Phi_{uu} \middle| \Phi_u \times \Phi_v \right\rangle = \tfrac{2}{4(u^2+v^2)+1} \\ h_{12} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \left\langle \Phi_{uv} \middle| \Phi_u \times \Phi_v \right\rangle = \quad 0 \\ h_{22} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \left\langle \Phi_{vv} \middle| \Phi_u \times \Phi_v \right\rangle = -\tfrac{2}{4(u^2+v^2)+1}\,, \end{aligned}$$

und somit

$$\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) = \sqrt{EG-F^2} \left(\begin{smallmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{smallmatrix}\right) = \frac{2}{\sqrt{4(u^2+v^2)+1}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

(a) An der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ haben wir

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right).$$

Also ist die Weingarten-Matrix gegeben durch

$$\mathrm{W} = \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix W hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$ und zugehörige Eigenvektoren $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Also hat der Punkt auf P an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ die Hauptkrümmungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$ und Hauptkrümmungsvektoren $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Sei $P_0 := \Phi\,(0\,,0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir verwenden Kurven wie in der Definition der Weingarten-Matrix in §3.2.2 beschrieben, sogenannte Normalschnitte. Wählt man für einen solchen Normalschnitt eine Parametrisierung $c : I \to D$, für welche c' an der betrachteten Stelle eine Hauptkrümmungsrichtung ist, dann hat die resultierende Kurve, die von $\Phi \circ c$ parametrisiert wird, dort die zugehörige Hauptkrümmung als Krümmung.

Sei $c_{(1)}(u) := \left(\begin{smallmatrix} u \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $u \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung.

Wir zeigen, dass $c'_{(1)}$ *ein Hauptkrümmungsvektor bei* $u = 0$ *ist.*

Wir haben

$$c'_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \,.$$

Also ist $c'_{(1)}$ ein Hauptkrümmungsvektor bei $u = 0$.

Sei $K_{(1)}$ die Kurve auf P, die durch

$$C_{(1)}(u) := \Phi\left(c_{(1)}(u)\right) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird.

Wir zeigen, dass $K_{(1)}$ *ein Normalschnitt von* P *in* P_0 *ist.*

An der Stelle $u = 0$ wird

$$C_{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P_0 \,.$$

Also verläuft $K_{(1)}$ durch den Punkt P_0 .

Wir betrachten die x_1-x_3-Ebene $E_{(1)} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) : x_2 = 0 \right\}$.

Wir haben

$$\mathfrak{n} := \Phi_u\,(0\,,0) \times \Phi_v\,(0\,,0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

Die Ebene $E_{(1)}$ enthält den Punkt $P_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und die Gerade

$$\{P_0 + r\mathfrak{n} \colon r \in \mathbb{R}\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{smallmatrix}\right) : r \in \mathbb{R} \right\} .$$

Ferner enthält $E_{(1)}$ die Kurve $K_{(1)}$. Also ist insbesondere $K_{(1)} \subseteq P \cap E_{(1)}$.

Somit ist $K_{(1)}$ ein Normalschnitt von P in P_0 .

Mit diesen beiden Eigenschaften gilt dann

$$\lambda_1 = \kappa \cdot \underbrace{\cos(\nu)}_{\pm 1} .$$

Also stimmt die Hauptkrümmung λ_1 bis auf Vorzeichen mit der Krümmung κ an der betrachteten Stelle überein.

Wir verifizieren dieses Ergebnis an der Stelle $\binom{0}{0}$ mit einer direkten Rechnung.

Die Kurve $K_{(1)}$ wird parametrisiert durch

$$C_{(1)}(u) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix} .$$

Wir haben

$$C'_{(1)}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C''_{(1)}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Ferner haben wir

$$|C'_{(1)}(u)| = \sqrt{1+4u^2}\,, \; C'_{(1)}(u) \times C''_{(1)}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |C'_{(1)}(u) \times C''_{(1)}(u)| = 2\,.$$

Also ist die Krümmung an der Stelle $\binom{0}{0}$ gegeben durch

$$\kappa = \tfrac{1}{|C'_{(1)}(0)|^3} |C'_{(1)}(0) \times C''_{(1)}(0)| = \frac{1}{(\sqrt{1+4\cdot 0^2})^3} \cdot 2 = 2\,.$$

Die Hauptkrümmung zum Hauptkrümmungsvektor $\binom{1}{0}$ ist gegeben durch

$$\lambda_1 = 2\,.$$

Dies zeigt, dass κ und λ_1 übereinstimmen. Das Vorzeichen ist hier zufällig dasselbe.

Sei $c_{(2)}(v) := \binom{0}{v}$ mit $v \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung.

Wir zeigen, dass $c'_{(2)}$ ein Hauptkrümmungsvektor bei $v = 0$ ist.

Wir haben

$$c'_{(2)} = \binom{0}{1} = v_2\,.$$

Also ist $c'_{(2)}$ ein Hauptkrümmungsvektor bei $v = 0$.

Sei $K_{(2)}$ die Kurve auf P, die durch

$$C_{(2)}(v) := \Phi\left(c_{(2)}(v)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ -v^2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird.

Wir zeigen, dass $K_{(2)}$ ein Normalschnitt von P in P_0 ist.

An der Stelle $v = 0$ wird

$$C_{(2)}\,(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P_0\,.$$

Also verläuft $K_{(2)}$ durch den Punkt P_0.

Wir betrachten die x_2-x_3-Ebene $E_{(2)} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) : x_1 = 0 \right\}$.

Wir haben wieder

$$\mathfrak{n} = \Phi_u\,(0\,,0) \times \Phi_v\,(0\,,0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

Die Ebene $E_{(2)}$ enthält den Punkt $P_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und die Gerade

$$\{P_0 + r\mathfrak{n} \colon r \in \mathbb{R}\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{smallmatrix}\right) : r \in \mathbb{R} \right\} .$$

Ferner enthält $E_{(2)}$ die Kurve $K_{(2)}$. Also ist insbesondere $K_{(2)} \subseteq P \cap E_{(2)}$.

Somit ist $K_{(2)}$ ein Normalschnitt von P in P_0.

Mit diesen beiden Eigenschaften gilt dann

$$\lambda_2 = \kappa \cdot \underbrace{\cos(\nu)}_{\pm 1} .$$

Also stimmt die Hauptkrümmung λ_2 bis auf Vorzeichen mit der Krümmung κ an der betrachteten Stelle überein.

Wir verifizieren dieses Ergebnis an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ *mit einer direkten Rechnung.*

Die Kurve $K_{(2)}$ wird parametrisiert durch

$$C_{(2)}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ -v^2 \end{pmatrix} .$$

Wir haben

$$C'_{(2)}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C''_{(2)}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Ferner haben wir

$$|C'_{(2)}(v)| = \sqrt{1+4v^2}\,,\ C'_{(2)}(v) \times C''_{(2)}(v) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |C'_{(2)}(u) \times C''_{(2)}(u)| = 2\,.$$

Also ist die Krümmung an der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben durch

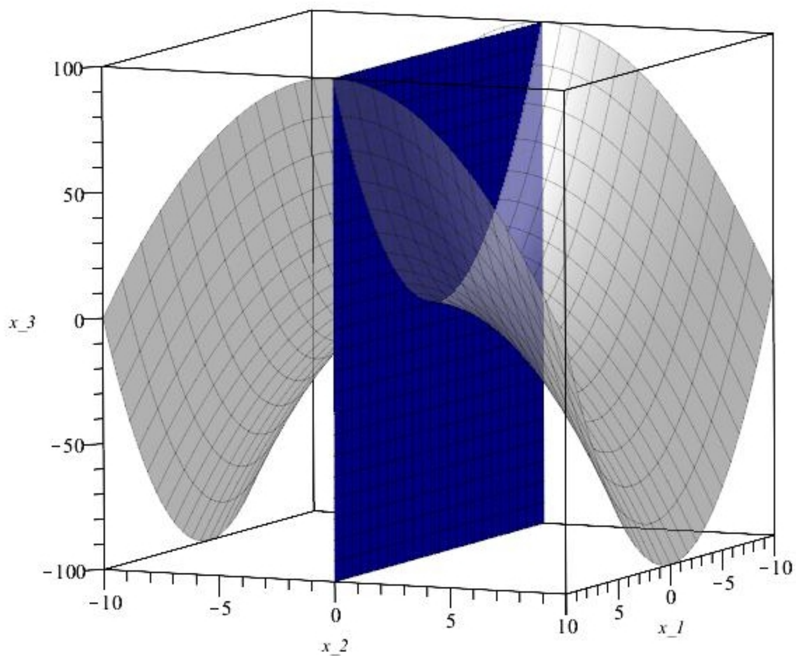
$$\kappa = \tfrac{1}{|C'_{(2)}(0)|^3} |C'_{(2)}(0) \times C''_{(2)}(0)| = \frac{1}{(\sqrt{1+4\cdot 0^2})^3} \cdot 2 = 2\,.$$

Die Hauptkrümmung zum Hauptkrümmungsvektor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist gegeben durch

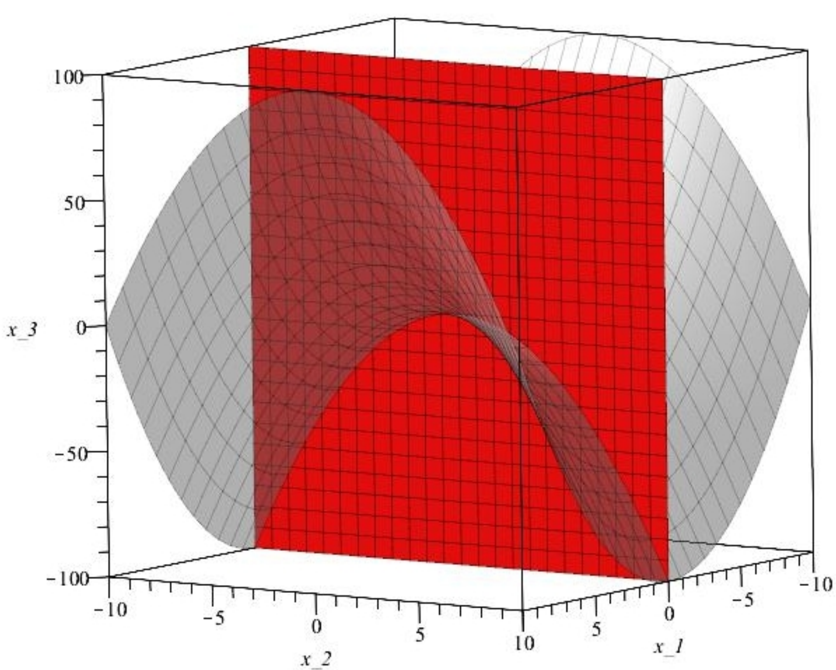
$$\lambda_2 = -2\,.$$

Dies zeigt, dass κ und λ_2 bis auf Vorzeichen übereinstimmen.

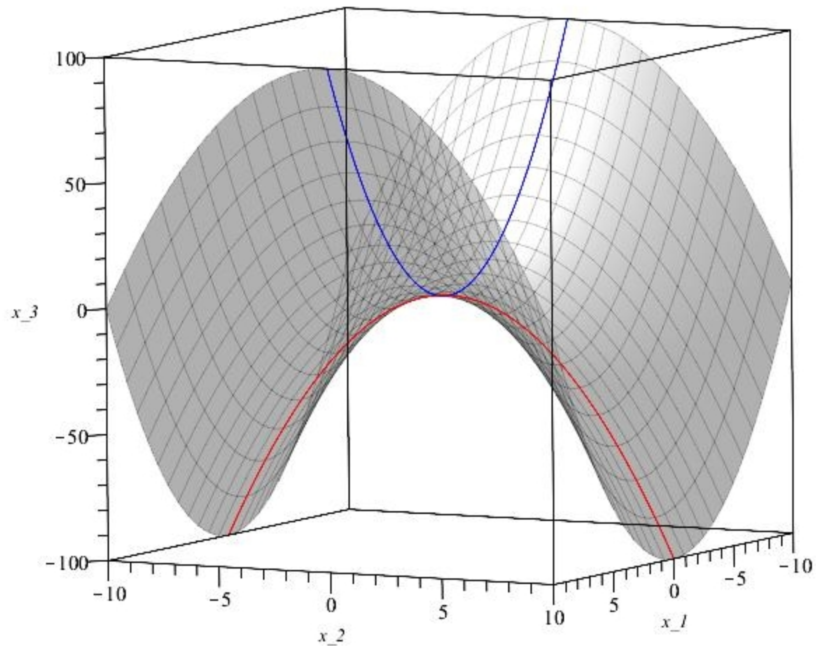
Eine Grafik des hyperbolischen Paraboloids P mit der x_1-x_3-Ebene $E_{(1)}$ (blau)



Eine Grafik des hyperbolischen Paraboloids P mit der x_2-x_3-Ebene $E_{(2)}$ (rot)



Eine Grafik des hyperbolischen Paraboloids P mit den Kurven $K_{(1)}$ (blau) und $K_{(2)}$ (rot).



(b) An der Stelle $\binom{u}{v} = \binom{2}{1}$ haben wir

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Weingarten-Matrix gegeben durch

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{21\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 8 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha & -8\alpha \\ 8\alpha & -17\alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha := \frac{2}{21\sqrt{21}}$.

Wir berechnen die Hauptkrümmungen an der Stelle $\binom{2}{1}$.

> Man kann anstelle der Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 5\alpha & -8\alpha \\ 8\alpha & -17\alpha \end{pmatrix}$ auch die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 8 & -17 \end{pmatrix}$ berechnen und dann mit α multiplizieren. Die Eigenvektoren sind bei beiden Matrizen dieselben. Von diesem Trick werden wir im folgenden aber keinen Gebrauch machen.

Wir haben

$$\begin{aligned} \det\big(\mathrm{W} - \lambda \mathrm{E}_2\big) &= \det\begin{pmatrix} 5\alpha-\lambda & -8\alpha \\ 8\alpha & -17\alpha-\lambda \end{pmatrix} = -(5\alpha-\lambda)(17\alpha+\lambda) + 64\alpha^2 \\ &= -\big(85\alpha^2 + 5\alpha\lambda - 17\alpha\lambda - \lambda^2\big) + 64\alpha^2 = \lambda^2 + 12\alpha\lambda - 21\alpha^2 . \end{aligned}$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \big(-6+\sqrt{57}\big)\alpha &= \frac{2(\sqrt{57}-6)}{21\sqrt{21}} \\ \lambda_2 &= \big(-6-\sqrt{57}\big)\alpha &= -\frac{2(\sqrt{57}+6)}{21\sqrt{21}} \end{aligned}$$

Also hat die Matrix W die Eigenwerte λ_1 und λ_2, und die Hauptkrümmungen an der Stelle $\binom{2}{1}$ sind λ_1 und λ_2.

Wir berechnen zugehörige Hauptkrümmungsvektoren für die Hauptkrümmungen λ_1 und λ_2 .

Wir berechnen einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = (-6+\sqrt{57})\alpha$. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha-(-6+\sqrt{57})\alpha & -8\alpha \\ 8\alpha & -17\alpha-(-6+\sqrt{57})\alpha \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} (11-\sqrt{57})\alpha & -8\alpha \\ 8\alpha & (-11-\sqrt{57})\alpha \end{pmatrix} v_1$$

hat eine Koeffizientenmatrix von Rang 1, weswegen man nur die erste Zeile berücksichtigen muß, um auf den Lösungsvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 11-\sqrt{57} \end{pmatrix}$ zu kommen. Es ist v_1 also ein Hauptkrümmungsvektor zur Hauptkrümmung λ_1 .

Wir berechnen einen Eigenvektor v_2 zum Eigenwert $\lambda_2 = (-6-\sqrt{57})\alpha$. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\alpha-(-6-\sqrt{57})\alpha & -8\alpha \\ 8\alpha & -17\alpha-(-6-\sqrt{57})\alpha \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} (11+\sqrt{57})\alpha & -8\alpha \\ 8\alpha & (-11+\sqrt{57})\alpha \end{pmatrix} v_2$$

hat eine Koeffizientenmatrix von Rang 1, weswegen man nur die erste Zeile berücksichtigen muß, um auf den Lösungsvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 11+\sqrt{57} \end{pmatrix}$ zu kommen. Es ist v_2 also ein Hauptkrümmungsvektor zur Hauptkrümmung λ_2 .