Künzer, Truong Wintersemester 2022/23

Differentialgeometrie für Geodäten

Lösung 9

Es parametrisiert $\Phi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$ mit $\varphi,\ \psi\ \in\ [0,2\pi]$ einen Torus T.

Vgl. Hausaufgaben 5, 9, 11, 13, 15.

Hausaufgabe 17

Man verifiziere das Theorema egregium für die Gaußsche Krümmung des Torus T, wie oben parametrisiert.

Lösung.

Aus Hausaufgabe 5(c) ist bekannt

$$E = 1\,,\ \ F = 0 \quad \text{und} \quad G = (2+\sin(\varphi))^2\,.$$

Wir haben

$$\begin{array}{rclcrcl} E_\varphi &=& 0 & \qquad & E_\psi &=& 0 \\ F_\varphi &=& 0 & & F_\psi &=& 0 \\ G_\varphi &=& 2(2+\sin(\varphi))\cos(\varphi) & & G_\psi &=& 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} E_{\psi\psi} &=& 0 \\ F_{\varphi\psi} &=& 0 \\ G_{\varphi\varphi} &=& 2\big(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 - 2\sin(\varphi)\big)\,. \end{array}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} F_{\varphi\psi}-\frac{1}{2}G_{\varphi\varphi}-\frac{1}{2}E_{\psi\psi} & \frac{1}{2}E_\varphi & F_\varphi-\frac{1}{2}E_\psi \\ F_\psi-\frac{1}{2}G_\varphi & E & F \\ \frac{1}{2}G_\psi & F & G \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} -\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2+2\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ -(2+\sin(\varphi))\cos(\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (2+\sin(\varphi))^2 \end{pmatrix} \\ &= \big(-\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2+2\sin(\varphi)\big)\cdot 1\cdot(2+\sin(\varphi))^2 \\ &= \big(-\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2+2\sin(\varphi)\big)\cdot(2+\sin(\varphi))^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_\psi & \frac{1}{2}G_\varphi \\ \frac{1}{2}E_\psi & E & F \\ \frac{1}{2}G_\varphi & F & G \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & (2+\sin(\varphi))\cos(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ (2+\sin(\varphi))\cos(\varphi) & 0 & (2+\sin(\varphi))^2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+3}\cdot(2+\sin(\varphi))\cos(\varphi)\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (2+\sin(\varphi))\cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \\ &= (2+\sin(\varphi))\cos(\varphi)\cdot(-(2+\sin(\varphi))\cos(\varphi)) \\ &= -\cos(\varphi)^2\cdot(2+\sin(\varphi))^2\,. \end{aligned}$$

Also haben wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}_{\text{Gauß}} &= \tfrac{1}{(EG-F^2)^2} \left(\det \begin{pmatrix} F_{\varphi\psi} - \frac{1}{2} G_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2} E_{\psi\psi} & \frac{1}{2} E_\varphi & F_\varphi - \frac{1}{2} E_\psi \\ F_\psi - \frac{1}{2} G_\varphi & E & F \\ \frac{1}{2} G_\psi & F & G \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} E_\psi & \frac{1}{2} G_\varphi \\ \frac{1}{2} E_\psi & E & F \\ \frac{1}{2} G_\varphi & F & G \end{pmatrix} \right) \\
&= \tfrac{1}{(2+\sin(\varphi))^4} \cdot \Big(\big(-\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 + 2\sin(\varphi) \big) \cdot (2+\sin(\varphi))^2 + \cos(\varphi)^2 \cdot (2+\sin(\varphi))^2 \Big) \\
&= \tfrac{1}{(2+\sin(\varphi))^2} \cdot \Big(-\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 + 2\sin(\varphi) + \cos(\varphi)^2 \Big) \\
&= \tfrac{1}{(2+\sin(\varphi))^2} \cdot \sin(\varphi) \cdot (2+\sin(\varphi)) \\
&= \tfrac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)} \, .
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem aus Hausaufgabe 11(a) überein.

Hausaufgabe 18

Man verifiziere Gauß-Bonnet, Version 2, für den Torus T, wie oben parametrisiert.

Lösung.

Da der Torus ein Loch besitzt, ist $g = 1$. Also ist

$$(2-2g)\cdot 2\pi = (2-2\cdot 1)\cdot 2\pi = 0\,.$$

Aus Hausaufgabe 11(a) ist bekannt

$$\Phi_\varphi \times \Phi_\psi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ \cos(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)\sin(\varphi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\begin{aligned} |\Phi_\varphi \times \Phi_\psi| &= (2+\sin(\varphi))\cdot\sqrt{\cos(\varphi)^2+\cos(\psi)^2\sin(\varphi)^2+\sin(\psi)^2\sin(\varphi)^2} \\ &= (2+\sin(\varphi))\cdot\sqrt{\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2\left(\cos(\psi)^2+\sin(\psi)^2\right)} \\ &= (2+\sin(\varphi))\cdot\sqrt{\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2} \\ &= 2+\sin(\varphi)\,. \end{aligned}$$

Aus Hausaufgabe 11(a) ist ferner bekannt

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \tfrac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)}\,.$$

Für das Oberflächenintegral haben wir daher

$$\begin{aligned} \iint_T \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\ \mathrm{d}O &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\cdot|\Phi_\varphi\times\Phi_\psi|\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi)}{2+\sin(\varphi)}\cdot(2+\sin(\varphi))\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\cos(\varphi)\right]_0^{2\pi}\ \mathrm{d}\psi \\ &= \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}\psi \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Damit wird

$$(2-2g)\cdot 2\pi = 0 = \iint_T \mathrm{K}_{\text{Gauß}}\ \mathrm{d}O\,.$$

Dies bestätigt Gauß-Bonnet, Version 2, im vorliegenden Fall.