Künzer, Truong 26.01.2023

Differentialgeometrie für Geodäten

Probescheinklausur

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.

Lösungswege werden gewertet und sind mit abzugeben. Bitte nehmen Sie Ihre Bearbeitung auf separaten Blättern vor und legen Sie diese am Ende in den Umschlagbogen ein.

Aufgabe 1 (2+2+2 = 6 Punkte) Sei $C(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Es parametrisiert C die Kurve $K := C(\mathbb{R})$.

Wir betrachten den Kurvenpunkt $C(t)$ für ein gegebenes $t \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme den Tangentenvektor $v(t)$.

(b) Man bestimme den Normalenvektor $n(t)$.

(c) Man bestimme die Torsion $\tau(t)$.

Aufgabe 2 (2+3+2+3 = 10 Punkte)

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$ mit $u,\ v \in \mathbb{R}$ und $u^2 + v^2 \leqslant 1$.

(a) Man überprüfe: Es parametrisiert Φ die Halbkugel

$$H \ = \ \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 \geqslant 0 \}.$$

(b) Man bestimme $E = E(u,v)$, $F = F(u,v)$ und $G = G(u,v)$ für die Parametrisierung der Halbkugel aus (a).

(c) Wir betrachten die Fläche $A := H \cap \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2} \leqslant x_3 \leqslant 1 \}$.

Man skizziere H und darauf die Fläche A.

(d) Man berechne den Flächeninhalt von A under Verwendung von E, F und G.

Für das resultierende Integral verwende man Polarkoordinaten.

Aufgabe 3 (3+2+2 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u^2+v^2 \end{pmatrix}$ eines elliptischen Paraboloids P, wobei $u,\ v\ \in\ \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right)$ in Abhängigkeit von u und v.

(b) Sei $c = c(t) := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Kurve K auf P, die von $\Phi(c(t))$ parametrisiert wird.

Man bestimme die Matrizen Γ^1 und Γ^2, welche die Christoffelsymbole enthalten, an der Stelle $c(t)$.

(c) Ist die Kurve K eine Geodäte auf P ?

Aufgabe 4 (4+1+2 = 7 Punkte)

Es parametrisiere $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ \cos(u)\cdot\cos(v) \end{pmatrix}$ die Fläche S, wobei $u,\ v\ \in\ \mathbb{R}$.

Sei $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ \frac{\pi}{4}+t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Kurve K auf S, die durch $\Phi(c(t))$ parametrisiert wird.

(a) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right)$ an der Stelle $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$.

(b) Man bestimme die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}(0, \frac{\pi}{4})$ von S.

(c) Wir betrachten das Verhalten der Kurve K auf S im Punkt $\Phi(c(0))$.

Sei $n = n(0)$ der Normalenvektor an die Kurve K im Punkt $\Phi(c(0))$.

Sei $\mathfrak{n} := \Phi_u(c(0)) \times \Phi_v(c(0))$.

Sei $\nu = \nu(0)$ der von n und $\mathfrak{n}$ eingeschlossene Winkel.

Sei $\kappa = \kappa(0)$ die Krümmung der Kurve K im Punkt $\Phi(c(0))$.

Man bestimme

$$\kappa \cdot \cos(\nu)$$

unter Verwendung von E, F, G, L, M, N.