Künzer, Truong 26.01.2023

Differentialgeometrie für Geodäten

Probescheinklausur

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.

Lösungswege werden gewertet und sind mit abzugeben. Bitte nehmen Sie Ihre Bearbeitung auf separaten Blättern vor und legen Sie diese am Ende in den Umschlagbogen ein.

Aufgabe 1 (2+2+2 = 6 Punkte) Sei $C(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Es parametrisiert C die Kurve $K := C(\mathbb{R})$.

Wir betrachten den Kurvenpunkt $C(t)$ für ein gegebenes $t \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme den Tangentenvektor $v(t)$.

(b) Man bestimme den Normalenvektor $n(t)$.

(c) Man bestimme die Torsion $\tau(t)$.

Lösung.

(a) Wir haben

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |C'(t)| = \sqrt{4t^2+1}\,.$$

Also ist

$$v(t) = \frac{C'(t)}{|C'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Aus (a) wissen wir

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |C'(t)| = \sqrt{4t^2+1}\,.$$

Ferner haben wir

$$|C'(t)|' = \frac{4t}{\sqrt{4t^2+1}}\,,\; C''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; C'(t) \times C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |C'(t) \times C''(t)| = 2\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} n(t) &= \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)|} \big(|C'(t)| \cdot C''(t) - |C'(t)|' \cdot C'(t)\big) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{4t^2+1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4t}{\sqrt{4t^2+1}} \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4t^2+1}} \left(\begin{pmatrix} (4t^2+1)\cdot 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4t\cdot 2t \\ 0 \\ 4t\cdot(-1) \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Aus (a, b) wissen wir

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ferner ist

$$C'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det\big(C'(t),\, C''(t),\, C'''(t)\big) = \det\begin{pmatrix} 2t & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

da die Matrix eine Nullzeile aufweist.

Also ist

$$\tau(t) = \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)|^2} \cdot \det\big(C'(t),\, C''(t),\, C'''(t)\big) = \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)|^2} \cdot 0 = 0\,.$$

Aufgabe 2 (2+3+2+3 = 10 Punkte)

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$ mit $u,\, v \in \mathbb{R}$ und $u^2+v^2 \leqslant 1$.

(a) Man überprüfe: Es parametrisiert Φ die Halbkugel

$$H \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1,\; x_3 \geqslant 0 \right\}.$$

(b) Man bestimme $E = E(u,v)$, $F = F(u,v)$ und $G = G(u,v)$ für die Parametrisierung der Halbkugel aus (a).

(c) Wir betrachten die Fläche $A := H \cap \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{1}{2} \leqslant x_3 \leqslant 1 \right\}$.

Man skizziere H und darauf die Fläche A.

(d) Man berechne den Flächeninhalt von A under Verwendung von E, F und G.

Für das resultierende Integral verwende man Polarkoordinaten.

Lösung.

(a) Wir haben

$$u^2+v^2+\left(\sqrt{1-u^2-v^2}\right)^2 = u^2+v^2+1-u^2+v^2 = 1$$

und

$$\sqrt{1-u^2-v^2} \geqslant 0\;,$$

da Quadratwurzeln immer $\geqslant 0$ sind. Also ist stets $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix} \in H$.

Ferner durchläuft $\binom{u}{v}$ jeden Punkt im Vollkreis $\left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2+x_2^2 \leqslant 1 \right\}$. Somit durchläuft $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$ jeden Punkt von H.

Also parametrisiert Φ die Halbkugel H.

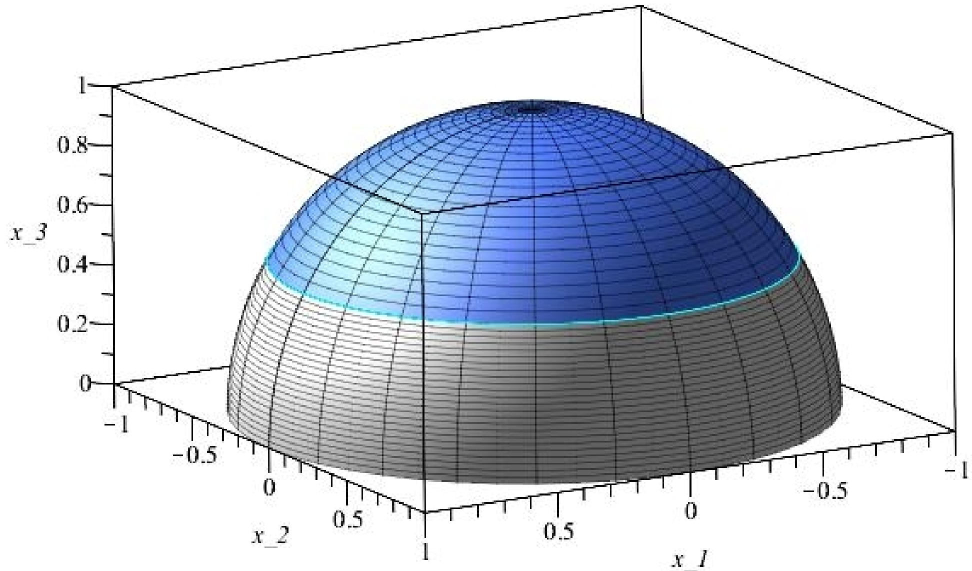
(b) Wir haben

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
E &= \left\langle \Phi_u \middle| \Phi_u \right\rangle = 1 + \frac{u^2}{1-u^2-v^2} = \frac{1-u^2-v^2+u^2}{1-u^2-v^2} = \frac{1-v^2}{1-u^2-v^2} \\
F &= \left\langle \Phi_u \middle| \Phi_v \right\rangle = \frac{uv}{1-u^2-v^2} \\
G &= \left\langle \Phi_v \middle| \Phi_v \right\rangle = 1 + \frac{v^2}{1-u^2-v^2} = \frac{1-u^2-v^2+v^2}{1-u^2-v^2} = \frac{1-u^2}{1-u^2-v^2}\,.
\end{aligned}$$

(c) Eine Grafik mit der Halbkugel H und der Fläche A (blau).



Die Fläche A wird von einem Kreis mit Radius $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (hellblau) berandet.

(d) Wir haben

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \frac{1-v^2}{1-u^2-v^2} \cdot \frac{1-u^2}{1-u^2-v^2} - \frac{(uv)^2}{(1-u^2-v^2)^2} \\ &= \frac{1-u^2-v^2+(uv)^2}{(1-u^2-v^2)^2} - \frac{(uv)^2}{(1-u^2-v^2)^2} \\ &= \frac{1-u^2-v^2}{(1-u^2-v^2)^2} \\ &= \frac{1}{1-u^2-v^2}\,. \end{aligned}$$

Sei $J := \{ \binom{u}{v} \mid u^2+v^2 \leqslant \frac{3}{4} \}$. Mit Polarkoordinaten ergibt sich für den Flächeninhalt von $A = \Phi(J)$ also

$$\begin{aligned} \iint_J \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \iint_J \sqrt{\frac{1}{1-u^2-v^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{\frac{1}{1-(r\cos(\varphi))^2-(r\sin(\varphi))^2)}}\;\; r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{\frac{1}{1-r^2}}\;\; r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,. \end{aligned}$$

Wir führen eine Substitution mit $t := 1-r^2$ und $\mathrm{d}t = -2r\mathrm{d}r$ durch.

Für die Integrationsgrenzen wird $t(0) = 1 - 0^2 = 1$ und $t(\sqrt{3}/2) = 1 - (\sqrt{3}/2)^2 = 1/4$.

Dann ist

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2}\sqrt{\frac{1}{1-r^2}}\;\; r\;\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{t(0)}^{t(\sqrt{3}/2)}\sqrt{\frac{1}{t}}\;\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\;\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\int_1^{1/4} t^{-1/2}\;\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left[2t^{1/2}\right]_1^{1/4}\mathrm{d}\varphi = -\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-1\right)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi\,.$$

Aufgabe 3 (3+2+2 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u^2+v^2 \end{pmatrix}$ eines elliptischen Paraboloids P, wobei $u,\ v \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right)$ in Abhängigkeit von u und v.

(b) Sei $c = c(t) := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Kurve K auf P, die von $\Phi(c(t))$ parametrisiert wird.

Man bestimme die Matrizen Γ^1 und Γ^2, welche die Christoffelsymbole enthalten, an der Stelle $c(t)$.

(c) Ist die Kurve K eine Geodäte auf P?

Lösung.

(a) Wir haben

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$\begin{aligned} E &= \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle &= 1 + 16u^2 \\ F &= \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle &= 8uv \\ G &= \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle &= 1 + 4v^2 . \end{aligned}$$

Also haben wir

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1+16u^2 & 8uv \\ 8uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 32u & 8v \\ 8v & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 8u \\ 8u & 8v \end{smallmatrix}\right) .$$

(b) An der Stelle $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = c(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ haben wir

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1+16\cdot 0^2 & 8\cdot 0\cdot t \\ 8\cdot 0\cdot t & 1+4t^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+4t^2 \end{pmatrix} \\ \left(\begin{smallmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 32\cdot 0 & 8t \\ 8t & 0 \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 8t \\ 8t & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 8\cdot 0 \\ 8\cdot 0 & 8t \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8t \end{smallmatrix}\right) . \end{aligned}$$

Also ist

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+4t^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+4t^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+4t^2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8t}{1+4t^2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+4t^2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+4t^2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4t}{1+4t^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und somit

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+4t^2} \begin{pmatrix} 8t & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix} .$$

(c) Wir haben

$$c' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Also ist

$$\begin{aligned}
{c'}^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &&= 0 \\
{c'}^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1+4t^2} \begin{pmatrix} 8t & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &&= \frac{4t}{1+4t^2} \\
{c'}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+4t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &&= 1 + 4t^2 \\
{c'}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &&= 0 \\
{c'}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8t \\ 8t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &&= 0 \\
{c'}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &&= 8t \,.
\end{aligned}$$

Die Geodäten-Bedingung lautet somit

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\overset{!}{=} c'' + \begin{pmatrix} {c'}^{\mathrm{T}}\Gamma^1 c' \\ {c'}^{\mathrm{T}}\Gamma^2 c' \end{pmatrix} - \frac{1}{{c'}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'} \left({c'}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'' + \frac{1}{2} {c'}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} c' \cdot c'_1 + \frac{1}{2} {c'}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} c' \cdot c'_2 \right) \cdot c' \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4t}{1+4t^2} \end{pmatrix} - \frac{1}{1+4t^2} \cdot \left(0+0+\tfrac{1}{2}\cdot 8t \cdot 1 \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4t}{1+4t^2} \end{pmatrix} - \frac{1}{1+4t^2} \cdot 4t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Da dies für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, ist die Kurve K eine Geodäte auf P.

Aufgabe 4 (4+1+2 = 7 Punkte)

Es parametrisiere $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ \cos(u)\cdot\cos(v) \end{pmatrix}$ die Fläche S, wobei $u,\ v \in \mathbb{R}$.

Sei $c(t) := \begin{pmatrix} t \\ \frac{\pi}{4}+t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Kurve K auf S, die durch $\Phi(c(t))$ parametrisiert wird.

(a) Man bestimme $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ an der Stelle $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$.

(b) Man bestimme die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}(0, \frac{\pi}{4})$ von S.

(c) Wir betrachten das Verhalten der Kurve K auf S im Punkt $\Phi(c(0))$.
Sei $n = n(0)$ der Normalenvektor an die Kurve K im Punkt $\Phi(c(0))$.
Sei $\mathfrak{n} := \Phi_u(c(0)) \times \Phi_v(c(0))$.
Sei $\nu = \nu(0)$ der von n und $\mathfrak{n}$ eingeschlossene Winkel.
Sei $\kappa = \kappa(0)$ die Krümmung der Kurve K im Punkt $\Phi(c(0))$.
Man bestimme
$$\kappa \cdot \cos(\nu)$$
unter Verwendung von E, F, G, L, M, N.

Lösung.

(a) Wir haben

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sin(u)\cos(v) \end{pmatrix}, \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\cos(u)\sin(v) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos(u)\cos(v) \end{pmatrix}, \quad \Phi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(u)\sin(v) \end{pmatrix}, \quad \Phi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos(u)\cos(v) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} \sin(u)\cos(v) \\ \cos(u)\sin(v) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

An der Stelle $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ ist dann

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{uu} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{vv} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$E = \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle = 1\,, \quad F = \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle = 0\,, \quad G = \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle = \frac{3}{2}\,,$$

und somit

$$\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\,.$$

Ferner haben wir

$$EG - F^2 = \frac{3}{2}\,,$$

und

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{uu} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle \Phi_{uv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle &= 0 \\ \langle \Phi_{vv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} h_{11} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \langle \Phi_{uu} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{(-1)}{\sqrt{2}} = -\tfrac{\sqrt{2}}{3} \\ h_{12} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \langle \Phi_{uv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle = 0 \\ h_{22} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \langle \Phi_{vv} | \Phi_u \times \Phi_v \rangle = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{(-1)}{\sqrt{2}} = -\tfrac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) = \sqrt{EG-F^2} \left(\begin{smallmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{smallmatrix}\right) = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{3} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\,.$$

(b) Wir haben

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \overset{\text{(a)}}{=} -\tfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\right) - 0^2 = \tfrac{2}{9}\,.$$

(c) Für $t \in \mathbb{R}$ haben wir

$$c(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\pi}{4} + t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Also ist

$$c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

An der Stelle $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ haben wir somit

$$c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) c' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \tfrac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-1 + 0 + 0 - 1) = -\tfrac{2}{\sqrt{3}}$$

und

$$c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 1 + 0 + 0 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{2}\,.$$

Dies zeigt

$$\kappa \cdot \cos(\nu) = \frac{c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} L & M \\ M & N \end{smallmatrix}\right) c'}{c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5\sqrt{3}}\,.$$
