Künzer, Truong 17.02.2023

Differentialgeometrie für Geodäten

Scheinklausur

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.

Lösungswege werden gewertet und sind mit abzugeben. Bitte nehmen Sie Ihre Bearbeitung auf separaten Blättern vor und legen Sie diese am Ende in den Umschlagbogen ein.

Aufgabe 1 (2+2+2 = 6 Punkte)

Sei $C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Es parametrisiert C die Kurve $K := C(\mathbb{R})$.

Wir betrachten den Kurvenpunkt $C(t)$ für ein gegebenes $t \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme den Tangentenvektor $v(t)$.

(b) Man bestimme die Krümmung $\kappa(t)$.

(c) Man bestimme die Torsion $\tau(t)$.

Aufgabe 2 (1+3+2+2+2 = 10 Punkte)

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(\varphi, h) := \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $h \in \mathbb{R}_0^+$.

(a) Man überprüfe: Es parametrisiert Φ den Kegel

$$Q \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 ,\; x_3 \geqslant 0 \right\} .$$

(b) Man bestimme $E = E(\varphi, h)$, $F = F(\varphi, h)$ und $G = G(\varphi, h)$ für die Parametrisierung des Kegels aus (a).

(c) Sei nun $c(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 2 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Man bestimme $\Phi(c(\varphi))$.

Man überprüfe: Es parametrisiert $\Phi(c(\varphi))$, mit $\varphi \in [0, 2\pi]$, die Kurve

$$K \;:=\; Q \cap \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 2 \right\} .$$

(d) Man skizziere Q und darauf die Kurve K.

(e) Man berechne die Länge von K unter Verwendung von E, F und G.

Aufgabe 3 (3+2+2 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(\varphi, h) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$ eines Zylinders Z, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $h \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von φ und h. Man folgere: Es ist $\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $c = c(\varphi) := \begin{pmatrix} \varphi \\ a \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Wir betrachten die Kurve K_a auf Z, die von $\Phi(c(\varphi))$ parametrisiert wird.

Man bestimme $c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c'$ und $c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} c''$.

(c) Für welches a ist die Kurve K_a eine Geodäte auf Z?

Aufgabe 4 (4+1+2 = 7 Punkte)

Es parametrisiert $\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$ ein hyperbolisches Paraboloid P, wobei u, $v \in \mathbb{R}$.

Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

Wir betrachten die Kurve K auf P, die durch $= \Phi(c(t))$ parametrisiert wird.

(a) Man bestimme $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von u, $v \in \mathbb{R}$.

(b) Man bestimme die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u, v)$ von P für u, $v \in \mathbb{R}$.

(c) Wir betrachten das Verhalten der Kurve K auf P im Punkt $\Phi(c(0))$.

Sei $n = n(0)$ der Normalenvektor an die Kurve K im Punkt $\Phi(c(0))$.

Sei $\mathfrak{n} := \Phi_u(c(0)) \times \Phi_v(c(0))$.

Sei $\nu = \nu(0)$ der von n und $\mathfrak{n}$ eingeschlossene Winkel.

Sei $\kappa = \kappa(0)$ die Krümmung der Kurve K im Punkt $\Phi(c(0))$.

Man bestimme

$$\kappa \cdot \cos(\nu)$$

unter Verwendung von E, F, G, L, M, N.