Künzer, Truong 17.02.2023

Differentialgeometrie für Geodäten

Scheinklausur

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.

Lösungswege werden gewertet und sind mit abzugeben. Bitte nehmen Sie Ihre Bearbeitung auf separaten Blättern vor und legen Sie diese am Ende in den Umschlagbogen ein.

Aufgabe 1 (2+2+2 = 6 Punkte)

Sei $C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Es parametrisiert C die Kurve $K := C(\mathbb{R})$.

Wir betrachten den Kurvenpunkt $C(t)$ für ein gegebenes $t \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme den Tangentenvektor $v(t)$.

(b) Man bestimme die Krümmung $\kappa(t)$.

(c) Man bestimme die Torsion $\tau(t)$.

Lösung.

(a) Wir haben

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |C'(t)| = \sqrt{2 + 4t^2} = \sqrt{2}\,\sqrt{1 + 2t^2}\,.$$

Also ist

$$v(t) = \frac{C'(t)}{|C'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{1 + 2t^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}\,.$$

(b) Aus (a) wissen wir

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |C'(t)| = \sqrt{2}\,\sqrt{1 + 2t^2}\,.$$

Ferner haben wir

$$C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ C'(t) \times C''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |C'(t) \times C''(t)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,.$$

Also ist

$$\kappa(t) = \frac{1}{|C'(t)|^3} \cdot |C'(t) \times C''(t)| = \frac{1}{2\sqrt{2}\,(1 + 2t^2)^{3/2}} \cdot 2\sqrt{2} = (1 + 2t^2)^{-3/2}\,.$$

(c) Aus (a, b) wissen wir

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Ferner ist

$$C'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det\big(C'(t),\, C''(t),\, C'''(t)\big) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2t & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

da die Matrix eine Nullspalte aufweist.

Also ist

$$\tau(t) = \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)|^2} \cdot \det\big(C'(t),\, C''(t),\, C'''(t)\big) = \frac{1}{|C'(t) \times C''(t)|^2} \cdot 0 = 0\,.$$

Aufgabe 2 (1+3+2+2+2 = 10 Punkte)

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(\varphi, h) := \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $h \in \mathbb{R}_0^+$.

(a) Man überprüfe: Es parametrisiert Φ den Kegel

$$Q \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \,,\; x_3 \geqslant 0 \right\}.$$

(b) Man bestimme $E = E(\varphi, h)$, $F = F(\varphi, h)$ und $G = G(\varphi, h)$ für die Parametrisierung des Kegels aus (a).

(c) Sei nun $c(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 2 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Man bestimme $\Phi(c(\varphi))$.

Man überprüfe: Es parametrisiert $\Phi(c(\varphi))$, mit $\varphi \in [0, 2\pi]$, die Kurve

$$K \;:=\; Q \cap \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 = 2 \right\}.$$

(d) Man skizziere Q und darauf die Kurve K.

(e) Man berechne die Länge von K unter Verwendung von E, F und G.

Lösung.

(a) Wir haben

$$\big(h\cos(\varphi)\big)^2 + \big(h\sin(\varphi)\big)^2 = h^2\big(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\big) = h^2$$

und

$$h \geqslant 0\,.$$

Also liegt $\Phi(\varphi, h)$ auf Q.

Für gegebenes $h \geqslant 0$ durchläuft $\Phi(\varphi, h) = \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$ den gesamten Kreis um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ mit Radius h. Also liegt jeder Punkt auf Q im Bild von Φ.

Insgesamt parametrisiert Φ den Kegel Q.

(b) Wir haben

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -h\sin(\varphi) \\ h\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_h = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} E &= \big\langle \Phi_\varphi \big| \Phi_\varphi \big\rangle &&= \big(-h\sin(\varphi)\big)^2 + \big(h\cos(\varphi)\big)^2 &&= h^2\big(\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2\big) = h^2 \\ F &= \big\langle \Phi_\varphi \big| \Phi_h \big\rangle &&= -h\sin(\varphi)\cos(\varphi) + h\cos(\varphi)\sin(\varphi) &&= 0 \\ G &= \big\langle \Phi_h \big| \Phi_h \big\rangle &&= \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 + 1 &&= 2\,. \end{aligned}$$

(c) Wir haben

$$\Phi(c(\varphi)) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Das ist eine Parametrisierung des Kreises K, denn es ist

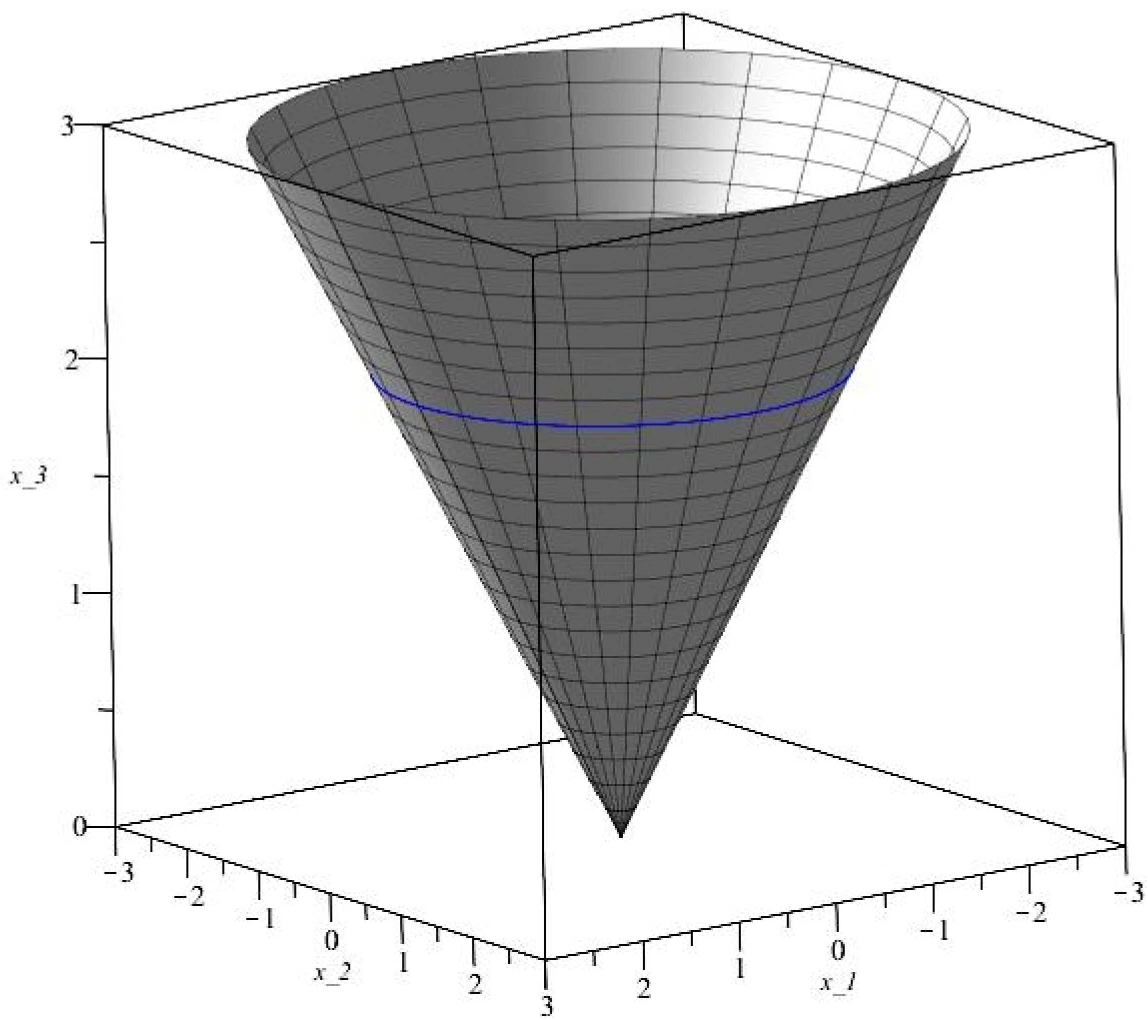
$$x_1^2 + x_2^2 = (2\sin(\varphi))^2 + (2\cos(\varphi))^2 = 4(\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2) = 4 = x_3^2$$

und

$$x_3 = 2 .$$

Ferner ist auch jeder Punkt von K von der Form $\Phi(c(\varphi))$, da $\varphi \in [0, 2\pi]$ läuft.

(d) Eine Grafik des Kegels Q und der Kurve K (blau).



(e) Es ist

$$c'(\varphi) = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Mit E, F und G aus (b) ist die Länge von K gegeben durch

$$\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{E \cdot {c_1'}^2 + 2F \cdot c_1' c_2' + G \cdot {c_2'}^2}\ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0}\ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 2\ \mathrm{d}\varphi = 4\pi\,.$$

Aufgabe 3 (3+2+2 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(\varphi, h) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$ eines Zylinders Z, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $h \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ in Abhängigkeit von φ und h. Man folgere: Es ist $\Gamma^1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\Gamma^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $c = c(\varphi) := \begin{pmatrix} \varphi \\ a\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Wir betrachten die Kurve K_a auf Z, die von $\Phi(c(\varphi))$ parametrisiert wird.

Man bestimme $c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'$ und $c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c''$.

(c) Für welches a ist die Kurve K_a eine Geodäte auf Z?

Lösung.

(a) Wir haben

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} E &= \langle \Phi_\varphi | \Phi_\varphi \rangle = (-\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 + 0^2 = \sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 = 1 \\ F &= \langle \Phi_\varphi | \Phi_h \rangle = 0 \\ G &= \langle \Phi_h | \Phi_h \rangle = 1\,. \end{aligned}$$

Da E, F und G konstant sind, haben wir

$$E_\varphi = E_h = 0\,, \quad F_\varphi = F_h = 0 \quad \text{und} \quad G_\varphi = G_h = 0\,.$$

Da nun jedes Christoffelsymbol Γ^i_{jk} eine Linearkombination aus diesen partiellen Ableitungen ist, folgern wir $\Gamma^1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\Gamma^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Wir haben

$$c' = c'(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ a\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c'' = c''(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Also ist

$$\begin{aligned} c'^{\mathrm{T}} \Gamma^1 c' &= 0 \\ c'^{\mathrm{T}} \Gamma^2 c' &= 0 \\ c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c' &= \begin{pmatrix} 1 & a\cos(\varphi) \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ a\cos(\varphi) \end{pmatrix} = 1 + a^2\cos(\varphi)^2 \\ c'^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) c'' &= \begin{pmatrix} 1 & a\cos(\varphi) \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -a\sin(\varphi) \end{pmatrix} = -a^2 \cdot \sin(\varphi)\cos(\varphi) \end{aligned}$$

(c) Es ist ferner

$$\begin{aligned} c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_\varphi & F_\varphi \\ F_\varphi & G_\varphi \end{pmatrix} c' &= 0 \\ c'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_h & F_h \\ F_h & G_h \end{pmatrix} c' &= 0\,. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (a) und (b) lautet die Geodäten-Bedingung somit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -a\sin(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1+a^2\cos(\varphi)^2} \cdot \Big((-a^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi)) + 0 + 0 \Big) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a\cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= -a\sin(\varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{1+a^2\cos(\varphi)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ a\cos(\varphi) \end{pmatrix} \,. \end{aligned}$$

Da die Vektoren $\binom{0}{1}$ und $\binom{1}{a\cos(\varphi)}$ linear unabhängig sind, ist diese Bedingung genau dann erfüllt, wenn deren Koeffizienten verschwinden. Dazu sollte

$$-a\sin(\varphi) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \frac{a^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{1+a^2\cos(\varphi)^2} \stackrel{!}{=} 0\,.$$

sein für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = 0$ ist.

Also ist die Kurve K_0 eine Geodäte auf Z. Und es ist K_a keine Geodäte auf Z, falls $a \neq 0$.

Aufgabe 4 (4+1+2 = 7 Punkte)

Es parametrisiert $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2-v^2 \end{pmatrix}$ ein hyperbolisches Paraboloid P, wobei $u,\ v \in \mathbb{R}$.

Sei $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

Wir betrachten die Kurve K auf P, die durch $C(t) := \Phi(c(t))$ parametrisiert wird.

(a) Man bestimme $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $u,\ v \in \mathbb{R}$.

(b) Man bestimme die Gaußsche Krümmung $\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = \mathrm{K}_{\text{Gauß}}(u,v)$ von P für $u,\ v \in \mathbb{R}$.

(c) Wir betrachten das Verhalten der Kurve K auf P im Punkt $\Phi(c(0))$.
Sei $n = n(0)$ der Normalenvektor an die Kurve K im Punkt $\Phi(c(0))$.
Sei $\mathfrak{n} := \Phi_u(c(0)) \times \Phi_v(c(0))$.
Sei $\nu = \nu(0)$ der von n und $\mathfrak{n}$ eingeschlossene Winkel.
Sei $\kappa = \kappa(0)$ die Krümmung der Kurve K im Punkt $\Phi(c(0))$.
Man bestimme

$$\kappa \cdot \cos(\nu)$$

unter Verwendung von $E,\ F,\ G,\ L,\ M,\ N$.

Lösung.

(a) Wir haben

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \qquad \Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} E &= \langle \Phi_u | \Phi_u \rangle = 1 + 4u^2 \\ F &= \langle \Phi_u | \Phi_v \rangle = -4uv \\ G &= \langle \Phi_v | \Phi_v \rangle = 1 + 4v^2\,, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}.$$

Ferner haben wir

$$EG - F^2 = (1+4u^2)(1+4v^2) - 16u^2v^2 = 4(u^2+v^2) + 1$$

und

$$\begin{aligned}\left\langle \Phi_{uu} \middle| \Phi_u \times \Phi_v \right\rangle &= 2\\ \left\langle \Phi_{uv} \middle| \Phi_u \times \Phi_v \right\rangle &= 0\\ \left\langle \Phi_{vv} \middle| \Phi_u \times \Phi_v \right\rangle &= -2\,.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}h_{11} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \left\langle \Phi_{uu} \middle| \Phi_u \times \Phi_v \right\rangle = \tfrac{2}{4(u^2+v^2)+1}\\ h_{12} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \left\langle \Phi_{uv} \middle| \Phi_u \times \Phi_v \right\rangle = 0\\ h_{22} &= \tfrac{1}{EG-F^2} \left\langle \Phi_{vv} \middle| \Phi_u \times \Phi_v \right\rangle = \tfrac{-2}{4(u^2+v^2)+1}\,.\end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\left(\begin{smallmatrix} L & M\\ M & N\end{smallmatrix}\right) = \sqrt{EG-F^2}\left(\begin{smallmatrix} h_{11} & h_{12}\\ h_{12} & h_{22}\end{smallmatrix}\right) = \sqrt{4(u^2+v^2)+1}\cdot\tfrac{2}{4(u^2+v^2)+1}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) = \tfrac{2}{\sqrt{4(u^2+v^2)+1}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\,.$$

(b) Wir haben

$$\mathrm{K}_{\text{Gauß}} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \overset{\text{(a)}}{=} \tfrac{2}{4(u^2+v^2)+1}\cdot\tfrac{(-2)}{4(u^2+v^2)+1} - 0^2 = \tfrac{-4}{(4(u^2+v^2)+1)^2}\,.$$

(c) Für $t \in [-\pi, \pi]$ haben wir

$$c(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c'(t) = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\,.$$

Also ist

$$c(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c'(0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,.$$

An der Stelle $\binom{u}{v} = c(0) = \binom{1}{0}$ haben wir somit

$$c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} L & M\\ M & N\end{smallmatrix}\right)c' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\tfrac{2}{\sqrt{4(1^2+0^2)+1}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 1\end{smallmatrix}\right) = \tfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 1\end{smallmatrix}\right) = \tfrac{-2}{\sqrt{5}}$$

und

$$c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right)c' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1+4\cdot 1^2 & 0\\ 0 & 1+4\cdot 0^2\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 1\end{smallmatrix}\right) = 1\,.$$

Dies zeigt

$$\kappa\cdot\cos(\nu) = \frac{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} L & M\\ M & N\end{smallmatrix}\right)c'}{c'^{\mathrm{T}}\left(\begin{smallmatrix} E & F\\ F & G\end{smallmatrix}\right)c'} = \frac{\frac{-2}{\sqrt{5}}}{1} = \frac{-2}{\sqrt{5}}\,.$$