Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 1

Platzaufgaben

Platzaufgabe 1 Sei $T := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 - x \}$.

(a) Skizzieren Sie T in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(b) Begründen Sie: Es ist T ein Normalbereich bezüglich der x-Achse. Berechnen Sie

$$\iint_T x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_{g(x)}^{h(x)} x \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \;,$$

mit geeigneten Funktionen $g(x)$ und $h(x)$.

(c) Begründen Sie: Es ist T ein Normalbereich bezüglich der y-Achse. Berechnen Sie

$$\iint_T x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_{g(y)}^{h(y)} x \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \;,$$

mit geeigneten Funktionen $g(y)$ und $h(y)$.

(d) Vergleichen Sie die Resultate aus (b) und (c).

Platzaufgabe 2 Wir betrachten die Kurve $K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ y \geqslant 0 \right\}$.

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Stellen Sie K als Graph einer Funktion $r(x)$ auf $[-1, +1]$ dar.

(c) Wir lassen die Kurve K um die x-Achse rotieren. Es entsteht ein Drehkörper E, nämlich ein Ellipsoid. Versuchen Sie, auch E zu skizzieren.

Berechnen Sie das Volumen von E.

Platzaufgabe 3 Sei $T := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 2,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 2 - x_1 \}$; siehe Platzaufgabe 1.
Sei K die geschlossene Kurve, von der T berandet wird. Zerlegen Sie K in drei Teilkurven und parametrisieren Sie diese in positiver Orientierung.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) = \binom{-x_2}{x_1}$.

(a) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(b) Berechnen Sie $\iint_T \operatorname{rot} g(x) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(c) Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 1

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 02.11.22 / Do 03.11.22 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 1 Sei $D := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2,\ xy \leqslant 2 \}$.

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der x-Achse dar.
Berechnen Sie damit $\iint_D x^2 y \;\, \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

(c) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y-Achse dar.
Berechnen Sie damit $\iint_D x^2 y \;\, \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

Hausaufgabe 2
Sei $K_1 := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + (y-2)^2 = 1,\ y \geqslant 2 \}$.
Sei $K_2 := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + (y-2)^2 = 1,\ y \leqslant 2 \}$.
Sei $K := K_1 \cup K_2$.
Das Integral $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\; \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$ darf im folgenden verwendet werden.

(a) Skizzieren Sie K_1, K_2 und K.

(b) Sei T_1 der Drehkörper, der durch Rotation von K_1 um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie das Volumen V_1 von T_1.

(c) Sei T_2 der Drehkörper, der durch Rotation von K_2 um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie das Volumen V_2 von T_2.

(d) Sei T der Torus, der durch Rotation von K um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie das Volumen $V = V_1 - V_2$ des Torus T.

Hausaufgabe 3
Sei $D := [0,\pi] \times [0,\pi] = \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x_1 \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant \pi \} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sei K die geschlossene Kurve, von der D berandet wird, positiv orientiert parametrisiert.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_2+x_1) \\ \cos(x_2-x_1) \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g,K) = \int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(b) Berechnen Sie $\iint_D \operatorname{rot} g(x)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(c) Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Green.