Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 2

Platzaufgaben

Platzaufgabe 4 Sei $J := \{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 \}$.
Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet. Sei K positiv orientiert parametrisiert.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x_1}{x_2} \mapsto g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, K)$.

(b) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{div} g(x) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(c) Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und aus (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Platzaufgabe 5

Sei $B := \{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \}$.

Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{u}{v} \mapsto \psi(u, v) = \binom{u+v}{2v}$.

Sei $D := \psi(B) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto f(x, y) = x - 2y$.

(a) Bestimmen Sie $\psi(0,0)$, $\psi(1,0)$, $\psi(0,1)$, $\psi(1,1)$. Skizzieren Sie $\psi(B) = D$.

(b) Schreiben Sie D als Normalbereich bezüglich der y-Achse.

(c) Berechnen Sie $\iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ unter Verwendung von (b).

(d) Bestimmen Sie $|\det \mathrm{J}\psi(u, v)|$.

(e) Verwenden Sie die Substitution

$$\iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \ = \ \iint_B f(u + v, 2v) \,|\det \mathrm{J}\psi(x, y)| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \ ,$$

um $\iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ erneut zu berechnen. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (c).

Platzaufgabe 6

Sei $S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;|\; z = x^2 + y^2 \text{ und } z \leqslant 4 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Skizzieren Sie S.

(b) Sei $K := \{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 \leqslant 4 \}$.

Finden Sie eine Parametrisierung $\Phi : K \to S : \binom{u}{v} \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \\ \Phi_3(u,v) \end{pmatrix}$.

(c) Berechnen Sie Φ_u, Φ_v und $n := \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|}$ für $\binom{u}{v} \in K$.

Fügen Sie diese drei Vektoren für $\binom{u}{v} = \binom{0}{1}$ an der Stelle $\Phi(0, 1)$ zur Skizze in (a) hinzu.

Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 2

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 09.11.22 / Do 10.11.22 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 4 Sei $J := \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_2 \geqslant 0 \}$.
Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet. Sei K positiv orientiert parametrisiert.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, K)$.

(b) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{div} g(x) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral.

(c) Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und aus (b) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Hausaufgabe 5 Sei $D := \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \leqslant 0 \}$.

(a) Finden Sie eine Parametrisierung $\psi : B \to D$ für einen geeigneten Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ unter Verwendung von Polarkoordinaten r und φ.

(b) Skizzieren Sie B im r-φ-Koordinatensystem. Skizzieren Sie D im x-y-Koordinatensystem. Skizzieren Sie die Teilmenge $\tilde{B} := \{ \left(\begin{smallmatrix} r \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \in B \,|\, r \geqslant \frac{1}{2} \} \subseteq B$. Skizzieren Sie $\psi(\tilde{B}) \subseteq D$.

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_D \frac{4\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

mittels einer Substitution unter Verwendung von (a).

Hausaufgabe 6
Sei $S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ und } z \geqslant 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Skizzieren Sie S.

(b) Sei $K := \{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 \leqslant 4 \}$.
Finden Sie eine Parametrisierung $\Phi : K \to S : \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \\ \Phi_3(u,v) \end{pmatrix}$.

(c) Berechnen Sie Φ_u, Φ_v und $n := \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|}$ für $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in K$.
Fügen Sie diese drei Vektoren für $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ an der Stelle $\Phi(0, 1)$ zur Skizze in (a) hinzu.