Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 3

Platzaufgaben

Platzaufgabe 7 Sei $S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant \frac{1}{2} \right\}$.

(a) Skizzieren Sie S als Teilmenge einer Kugeloberfläche.

(b) Wir betrachten die Kugelkoordinatenabbildung

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} .$$

Finden Sie eine Teilmenge $J \subseteq [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ mit $\Phi(J) = S$.

(c) Bestimmen Sie $\Phi_\varphi(\varphi, \vartheta)$, $\Phi_\vartheta(\varphi, \vartheta)$ und $\Phi_\varphi(\varphi, \vartheta) \times \Phi_\vartheta(\varphi, \vartheta)$. Siehe auch §2.1.2.

(d) Berechnen Sie die Fläche

$$\mathrm{F}(S) \;=\; \iint_J |\Phi_\varphi(\varphi, \vartheta) \times \Phi_\vartheta(\varphi, \vartheta)| \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta \, .$$

Dabei darf diese Formel auch dann Anwendung finden, wenn an einem Punkt dieses Kreuzprodukt den Nullvektor gibt. Bei welchem Punkt ist dies der Fall?

Platzaufgabe 8 Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x_1, x_2, x_3) = \left(\begin{smallmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{smallmatrix}\right)$.
Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} t_1 \\ t_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \Phi(t_1, t_2) = \left(\begin{smallmatrix} 2t_1 \\ 0 \\ t_2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Sei $J = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei $S := \Phi(J)$. Skizzieren Sie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) Geben Sie Parametrisierungen für die 4 Kanten von ∂S an.

(c) Berechnen Sie $\int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(d) Berechnen Sie $\iint_S \operatorname{rot} g(x) \bullet \, n \; \mathrm{d}O$ als Gebietsintegral.

(e) Vergleichen Sie die Resultate aus (c) und (d) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Stokes.

Platzaufgabe 9

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_0^x \int_y^x z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, .$$

(b) Über welchen Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ wurde in (a) integriert?

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 3

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 16.11.22 / Do 17.11.22 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 7 Sei

$$S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = xy,\ x^2 + y^2 \leqslant 2 \right\}$$

der Schnitt des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$ mit dem Zylinder $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

(a) Geben Sie $J \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Phi : J \to \mathbb{R}^3$ an mit $\Phi(J) = S$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{F}(S)$.
Verwenden Sie hierbei Polarkoordinaten bei der Auswertung des Integrals.

Hausaufgabe 8
Sei $S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_3 = 1 \right\}$.
Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung von S an als Graph einer konstanten Funktion.

(c) Berechnen Sie die Zirkulation $\mathrm{Z}(g, \partial S) = \int_{\partial S} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ als Kurvenintegral.

(d) Berechnen Sie $\iint_S \operatorname{rot} g(x) \bullet\, n \;\mathrm{d}O$ als Gebietsintegral. Vergleichen Sie mit (c).

Hausaufgabe 9 Wir betrachten die Halbkugel $B := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0 \right\}$.

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}x$ unter Verwendung der Substitution $x = 2\sin(t)$.

(b) Schreiben Sie den Kreis $D := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 4 \right\}$ als Normalbereich bezüglich der x-Achse.

(c) Schreiben Sie mittels (b) die Halbkugel B als Normalbereich bezüglich der x-y-Ebene.

(d) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\iiint_B z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ unter Verwendung von (c) und (a).