Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 4

Platzaufgaben

Platzaufgabe 10 Sei $D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 3 \right\}$.

Sei $\Psi(\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$ die Transformation in Zylinderkoordinaten.

(a) Man bestimme $B \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\Psi(B) = D$.

(b) Man transformiere das Integral

$$\iiint_D x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und von (a).

Man berechne damit dann das Integral.

Platzaufgabe 11

Sei $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 \right\}$ ein Würfel von Kantenlänge 1.

Sei S die Oberfläche von V.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto g(x,y,z) := \begin{pmatrix} 3x \\ xy \\ 2xz \end{pmatrix}$.

(a) Sei $S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \right\}$ eine Seite des Würfels V.

Parametrisieren Sie S_1 mittels $\Phi_{(1)}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei $0 \leqslant u \leqslant 1$ und $0 \leqslant v \leqslant 1$.

Verifizieren Sie: Es zeigt der Vektor $(\Phi_{(1)})_u \times (\Phi_{(1)})_v$, angeheftet an der Stelle $\Phi_{(1)}(u,v)$, nach außen.

Berechnen Sie $\int_0^1 \int_0^1 g(\Phi_{(1)}(u,v)) \bullet ((\Phi_{(1)})_u \times (\Phi_{(1)})_v) \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

(b) Verfahren Sie wie in (a) für die anderen 5 Seiten des Würfels.

(c) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g,S)$ durch Addition der Ergebnisse aus (a) und (b).

(d) Bestimmen Sie $\iiint_V \operatorname{div} g(x,y,z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ als Gebietsintegral.

(e) Vergleichen Sie die Resultate aus (c) und aus (d) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Platzaufgabe 12 Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(3x)$ auf $\mathbb{R}$.

Finden Sie a, $b \in \mathbb{R}$, für welche die Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by \;=\; 0$$

die Funktion $f(x)$ als Lösung hat.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 4

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 23.11.22 / Do 24.11.22 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 10 Sei $D := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 4 \right\}$.
Sei $\Psi(u,v,w) := \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \\ w^2 \end{pmatrix}$, definiert auf $P := \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$.
Sei $f(x,y,z) = xyz$, definiert auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ohne Verwendung einer Transformation.

(b) Bestimmen Sie $B \subseteq P$ mit $\Psi(B) = D$.

(c) Bestimmen Sie $|\det \mathrm{J}\Psi(u,v,w)|$.

(d) Bestimmen Sie $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ unter Verwendung der Transformation mittels Ψ.
Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und (d).

Hausaufgabe 11 Sei $V := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0 \right\}$.
Sei S die Oberfläche von V.
Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto g(x,y,z) := \begin{pmatrix} xz^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g,S)$.

(b) Bestimmen Sie $\iiint_V \operatorname{div} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ als Gebietsintegral.
Vergleichen Sie mit dem Resultat aus (a) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Hausaufgabe 12

(a) Für welche reellen Werte von a und b ist $f(x) = x - x^{-1}$, definiert auf $\mathbb{R}^+$, eine Lösung der Differentialgleichung
$$y' + \frac{ay}{x} - b \;=\; 0\ ?$$

(b) Für welche reellen Werte von r erfüllt $f(x) = \exp(rx)$, definiert auf $\mathbb{R}$, die Differentialgleichung
$$y'' + y' - 6y \;=\; 0\ .$$

Geben Sie noch eine weitere Lösung dieser Differentialgleichung an.