Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 6

Platzaufgaben

Platzaufgabe 16 Wir betrachten die folgende homogene lineare Differentialgleichung.

$$x^2y^{(2)} + xy^{(1)} - y = 0 \quad \text{für} \quad x > 0.$$

(a) Prüfen Sie, dass $f_1(x) = x^{-1}$ und $f_2(x) = x$ Lösungen auf $\mathbb{R}^+$ sind.

(b) Berechnen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(1)$ für die Lösungen aus (a).
Bestimmen Sie die Wronski-Determinante $\det(\mathrm{W}(1))$.

(c) Ist $f_1,\ f_2$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

Platzaufgabe 17 Wir betrachten die folgende homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

$$y'' - 3y' + 2y \ = \ 0\ .$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ an. Bestimmen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

(b) Berechnen Sie die Lösungen, die von der Form $\mathrm{e}^{\lambda x}$ sind, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(0)$ für die Lösungen aus (b). Bestimmen Sie $\mathrm{W}(0)^{-1}$.

(d) Prüfen Sie, ob die in (b) gefundenen Lösungen ein Fundamentalsystem bilden.

(e) Geben Sie den Lösungsraum an, d.h. die Menge aller Lösungen.

(f) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 4$ und $y'(0) = 5$ unter Verwendung von (b, c).

Platzaufgabe 18 Wir betrachten die folgende homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

$$y^{(3)} + 25y' \ = \ 0$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ an. Bestimmen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

(b) Berechnen Sie die Lösung f_1, die von der Form $\mathrm{e}^{\lambda x}$ ist, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie die Lösungen f_2, f_3, die von einem Paar echt komplexer Nullstellen herrühren.

(d) Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(0)$ für die Lösungen aus (b, c). Ist $\mathrm{W}(0)$ regulär?

(e) Ist $f_1,\ f_2,\ f_3$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 6

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 07.12.22 / Do 08.12.22 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 16 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$x^2 y^{(3)} - 3xy^{(2)} + 3y^{(1)} = 0 \quad \text{für} \quad x > 0$$

(a) Prüfen Sie, dass $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2$ und $f_3(x) = x^4$ Lösungen auf $\mathbb{R}^+$ sind.

(b) Berechnen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(1)$ für die Lösungen aus (a).

(c) Ist $f_1,\ f_2,\ f_3$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?
Bestimmen Sie den Lösungsraum.

(d) Welches Anfangswertproblem wird von $f_3(x)$ gelöst?

Hausaufgabe 17 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y'''' - 5y'' + 4y \ = \ 0$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(X)$.
Bestimmen Sie die Lösungen von der Form $\mathrm{e}^{\lambda x}$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(0)$ für die Lösungen aus (a).
Handelt es sich um eine Vandermonde-Matrix? Bestimmen Sie $\det(\mathrm{W}(0))$.

(c) Prüfen Sie, ob die in (a) gefundenen Lösungen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Welche Dimension hat der Lösungsraum?

Hausaufgabe 18 Wir betrachten die folgende Differentialgleichung.

$$y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 2y \ = \ 0$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ an. Berechnen Sie $p(-1)$. Bestimmen Sie die Nullstellen von $p(X)$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem.
Bestimmen Sie für dieses die Wronski-Matrix $\mathrm{W}(0)$ und deren Inverse.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ und $y''(0) = 1$ unter Verwendung von (b).