

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 7

Platzaufgaben

Platzaufgabe 19 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

- Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ an.
- Bestimmen Sie mit der Substitution $t = X^2$ die Nullstellen von $p(X)$.
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

Platzaufgabe 20 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = x^2 + 2.$$

- Geben Sie das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an. Bestimmen Sie für diese ein Fundamentalsystem.
- Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung mittels eines Ansatzes nach Art der rechten Seite. Liegt hierbei der Resonanzfall vor? Welchen Grad schreibt dieser Ansatz für das Polynom $f_p(x)$ vor?
- Bestimmen Sie alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung.

Platzaufgabe 21 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y' = e^{2x}.$$

- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $f_1(x), f_2(x)$ für die zugehörige homogene Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie die Wronski-Matrix $W(x)$. Berechnen Sie ihre Inverse $W(x)^{-1}$.
- Wir haben die Bedingung $W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie hieraus Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$.
- Verwenden Sie (c), um eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ von $y'' - y' = e^{2x}$ zu bestimmen.
- Geben Sie alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung an.
- Verwenden Sie einen Ansatz nach Art der rechten Seite, um *nochmals* eine partikuläre Lösung von $y'' - y' = e^{2x}$ zu bestimmen. Liegt hierbei der Resonanzfall vor?

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 7

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 14.12.22 / Do 15.12.22 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 19 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y'' + 16y' + 16y = 0.$$

- Geben Sie das charakteristische Polynom $p(X)$ an.
- Berechnen Sie $p(2i)$. Was folgt für $p(-2i)$?
Zerlegen Sie $p(X)$ in ein Produkt von Faktoren von Grad 1.
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

Hausaufgabe 20 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x^2} \cdot y = 1 \quad \text{für } x > 0.$$

- Wir betrachten die Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = x^{-1}$ auf \mathbb{R}^+ .
Bestätigen Sie: Es ist f_1, f_2 ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie die Inverse $W(x)^{-1}$ der Wronski-Matrix.
- Wir haben die Bedingung $W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie hieraus Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$.
- Verwenden Sie (c), um eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ von $y'' - \frac{2}{x^2} \cdot y = 1$ zu bestimmen.

Hausaufgabe 21 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y' = xe^x.$$

- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ für $y'' - y' = xe^x$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?
- Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 0, y'(0) = 1$ für $y'' - y' = xe^x$.