Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 9

Platzaufgaben

Platzaufgabe 25 Sei $f(t) = t^3 + 1$. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f'(t))$ direkt, ohne 5.4.9 zu verwenden.

(b) Bestimmen Sie $F(s)$.

(c) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f'(t))$ mit der Formel $\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus (a).

(d) Sei $g(t) = t$. Bestimmen Sie $\mathcal{L}(g(t))$.

(e) Berechnen Sie die Faltung $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

(f) Berechnen Sie $\mathcal{L}(f(t) * g(t))$. Bestätigen Sie: $\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t))$.

Platzaufgabe 26 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' + y \;=\; t\mathrm{e}^{-t}, \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } y(0) = 2.$$

Wir suchen die Lösung $f(t)$ dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Es ist $f'(t) + f(t) = t\mathrm{e}^{-t}$ und $f(0) = 2$.
Wenden Sie $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der Gleichung $f'(t) + f(t) = t\mathrm{e}^{-t}$ an.

(b) Lösen Sie die in (a) entstandene Gleichung nach $F(s)$ auf.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

Platzaufgabe 27 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + y \;=\; t, \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Sei $f(t)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems.

(a) Sei $u(t)$ die Lösung von $y'' + y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Sei $U(s) := \mathcal{L}(u(t))$.
Wenden Sie die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der Gleichung $u''(t) + u(t) = 0$ an.
Lösen Sie die entstehende Gleichung nach $U(s)$ auf.
Sei $p(X)$ das charakteristische Polynom von $y'' + y = 0$. Bestätigen Sie: Es ist $U(s) = \frac{1}{p(s)}$.

(b) Bestimmen Sie $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s))$ durch inverse Laplace-Transformation.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung $f(t) = u(t) * t = t * u(t)$.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 9

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 11.01.23 / Do 12.01.23 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 25 Sei $f(t) = \mathrm{e}^{2t}$. Sei $g(t) = t$.

(a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f''(t))$, ohne 5.4.9 zu verwenden.

(b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f''(t))$ unter Verwendung von 5.4.9. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus (a).

(c) Berechnen Sie die Faltung $f(t) * g(t)$.

(d) Berechnen Sie $\mathcal{L}(f(t) * g(t))$. Vergleichen Sie mit $\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t))$.

Hausaufgabe 26 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y \;=\; 8\sinh(t),$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Sei $f(t)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der entstehenden Gleichung an.

(b) Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (a).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstehenden Ausdruck an.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.

Hausaufgabe 27 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y \;=\; \mathrm{e}^t,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Sei $f(t)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems.

(a) Sei $u(t)$ die Lösung von $y'' - 4y' + 4y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Bestimmen Sie $U(s) := \mathcal{L}(u(t))$.

(b) Bestimmen Sie $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s))$.

(c) Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung: $f(t) = u(t) * \mathrm{e}^t$.