

## Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

**Blatt 10**

## Platzaufgaben

**Platzaufgabe 28** Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 5y_1 - y_2\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix  $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ .
- Verwenden Sie (a), um ein Fundamentalsystem für  $y' = Ay$  anzugeben.
- Berechnen Sie die Lösung für die Anfangswerte  $y_1(0) = 0$  und  $y_2(0) = 7$ .

**Platzaufgabe 29** Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- Bestimmen sie den Eigenwert  $\lambda$  von  $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Sei  $B := A - \lambda E_2$ . Sei  $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Man bestimme das minimale  $k \geq 0$  mit  $B^k v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- Man gebe ein Fundamentalsystem für  $y' = Ay$  an unter Verwendung von (b).  
Man gebe die Wronskimatrix  $W_{\text{sys}}(x)$  an. Man bestimme ihre Inverse  $W_{\text{sys}}(x)^{-1}$ .
- Man bestimme eine Partikulärlösung  $f_p(x)$  von  $y' = Ay + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Platzaufgabe 30** Betrachten Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$z'' + 2z' + 2z = 0 .$$

- Verwenden Sie die Substitution  $y_1 = z$  und  $y_2 = z'$ , um ein Differentialgleichungssystem für  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  aufzustellen, das die Form  $y' = Ay$  hat.
- Geben Sie ein Fundamentalsystem an für das in (a) aufgestellte System von Differentialgleichungen  $y' = Ay$ .
- Leiten Sie aus dem in (b) gefundenen Fundamentalsystem für  $y' = Ay$  ein Fundamentalsystem für  $z'' + 2z' + 2z = 0$  her.  
Leiten Sie mit Hilfe der Methode des charakteristischen Polynoms  $p(X)$  abermals ein Fundamentalsystem für  $z'' + 2z' + 2z = 0$  her.  
Vergleichen Sie die Ergebnisse.

## Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

**Blatt 10**

## Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 18.01.23 / Do 19.01.23 in den Gruppenübungen.

**Hausaufgabe 28** Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen.

$$y_1' = 4y_1 + y_2 + y_3$$

$$y_2' = -y_1 + 2y_2$$

$$y_3' = 2y_3$$

- (a) Schreiben Sie das System in der Form  $y' = Ay$  mit einer geeigneten Matrix  $A$ . Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$ .
- (b) Sei  $B := A - 3E_3$ . Sei  $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Man bestimme  $k \geq 0$  minimal mit  $B^k v = 0$ .
- (c) Man bestimme ein Fundamentalsystem von  $y' = Ay$ .
- (d) Man bestimme die Lösung  $f(x)$  von  $y' = Ay$  mit  $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Hausaufgabe 29** Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$z''' - 4z' = 0.$$

- (a) Verwenden Sie die Substitution  $y_1 = z$ ,  $y_2 = z'$ ,  $y_3 = z''$ , um ein Differentialgleichungssystem der Form  $y' = Ay$  aufzustellen.
- (b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für  $y' = Ay$ .
- (c) Leiten Sie aus dem in (b) gefundenen Fundamentalsystem für  $y' = Ay$  ein Fundamentalsystem für  $z''' - 4z' = 0$  her.

Leiten Sie mit Hilfe der Methode des charakteristischen Polynoms  $p(X)$  abermals ein Fundamentalsystem für  $z''' - 4z' = 0$  her.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

**Hausaufgabe 30** Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und zugehörige Eigenvektoren.
- (b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für  $y' = Ay$ . Geben Sie  $W_{\text{sys}}(x)$  an.
- (c) Man bestimme  $W_{\text{sys}}(0)^{-1}$ . Man bestimme  $W_{\text{sys}}(x)^{-1}$ .
- (d) Man bestimme eine Partikulärlösung  $f_p(x)$  von  $y' = Ay + \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Man bestimme die Menge aller Lösungen von  $y' = Ay + \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .