Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 12

Platzaufgaben

Platzaufgabe 34 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = |x|.$$

Sei

$$f_N(x) \;:=\; \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos(kx).$$

Sei

$$f_\infty(x) \;:=\; \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos(kx).$$

(a) Überprüfen Sie: Es ist $\operatorname{Fourier}_f(x) = f_\infty(x)$.

(b) Geben Sie $f_N(x)$ an für $N \in \{1, 2, 3\}$.

(c) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle f_1 | f_3 \rangle$ unter Verwendung von 7.2.4.

Platzaufgabe 35
Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus Platzaufgabe 34, um

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

erneut zu berechnen.

Platzaufgabe 36 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = |x|\ .$$

(a) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe $\operatorname{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$.

(b) Bestätigen Sie durch Vergleich mit Platzaufgabe 34, dass die Koeffizienten c_k von $\operatorname{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ mit den Koeffizienten a_k, b_k von $\operatorname{Fourier}_f(x)$ in folgender Beziehung stehen.

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2} \quad \text{für } k \geqslant 1.$$

Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 12

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 01.02.23 / Do 02.02.23 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 34 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{für } \phantom{-\pi<{}} 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{Fourier}_f(x)$.

(b) Sei $f_N(x)$ das N-te Fourier-Polynom von $f(x)$, für $N \geqslant 1$.
Bestimmen Sie $\|f - f_1\|^2$.
Bestimmen Sie $\|f - f_3\|^2$.
Schreiben Sie beide Resultate auch in Dezimaldarstellung mit 4 Nachkommastellen, unter Verwendung eines Taschenrechners.

Hausaufgabe 35

(a) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus Hausaufgabe 34, um

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

zu berechnen.

(b) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung und die Fourier-Reihe aus Hausaufgabe 31, um

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

zu berechnen.

Hausaufgabe 36 Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 - tx & \text{für } -\pi < x \leqslant 0 \\ 1 + tx & \text{für } \phantom{-\pi<{}} 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe $\operatorname{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$.

(b) Sei nun $t = 0$. Bestätigen Sie durch Vergleich mit Hausaufgabe 34, dass die Koeffizienten c_k von $\operatorname{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ mit den Koeffizienten a_k, b_k von $\operatorname{Fourier}_f(x)$ in folgender Beziehung stehen.

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geqslant 1.$$