Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 13

Platzaufgaben

Platzaufgabe 37 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade periodische Funktion mit Periode 4, die für $0 \leqslant x \leqslant 2$ gegeben ist durch

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant 1 \;, \\ x-1 & \text{falls } 1 < x \leqslant 2 \;. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(c) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und a_4 .

Platzaufgabe 38

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung $u_x - u_y = 0$.

Sei $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto w(t)$ eine beliebig gewählte differenzierbare Funktion.

Verifizieren Sie, dass $u(x, y) = w(x + y)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Wir betrachten die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Gesucht sind zweimal differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(y)$, definiert auf $\mathbb{R}$, für welche

$$u(x, y) \;=\; f(x) + g(y)$$

eine Lösung der Laplace-Gleichung ist, die $u(x, 0) = x^2$ erfüllt für $x \in \mathbb{R}$.

Platzaufgabe 39 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_{xx} = u_t \;,$$

mit Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \qquad u(\pi, t) = 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x, 0) \;=\; f(x) \;:=\; \sin(x) + \sin(2x) \qquad \text{für } x \in [0, \pi].$$

(a) Geben Sie die Fourier-Koeffizienten b_n der ungeraden Fortsetzung von $f(x)$ an für $n \geqslant 1$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $u(x, t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt, unter Verwendung von 8.2.6.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von $f(x) = u(x, 0)$. Skizzieren Sie den Graphen von $u(x, \ln(2))$. Skizzieren Sie den Graphen von $u(x, \ln(10))$. Dabei sei jeweils $x \in [0, \pi]$.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 13

Hausaufgaben

Abgabe bis Mi 08.02.23 / Do 09.02.23 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 37 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die ungerade periodische Funktion mit Periode 1, die für $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ gegeben ist durch

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < x \leqslant \frac{1}{4} \\ 0 & \text{falls } \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

(b) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe von $f(x)$.

(c) Verwenden Sie (b) und den Zusammenhang $b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$, um die Fourier-Reihe von $f(x)$ zu bestimmen.

Hausaufgabe 38

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung $xu_x + yu_y = 5u$.

Sei $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto w(t)$ eine beliebig gewählte differenzierbare Funktion.

Verifizieren Sie, dass $u(x, y) = w\left(\dfrac{y}{x}\right) \cdot x^5$ eine Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ist.

(b) Wir betrachten die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Gesucht sind zweimal differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(y)$, definiert auf $\mathbb{R}$, für welche

$$u(x, y) \;=\; f(x) \cdot g(y)$$

eine Lösung der Laplace-Gleichung ist, die $u(x, 0) = \mathrm{e}^x$ erfüllt für $x \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 39 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_{xx} = 2u_t \;,$$

mit Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = 0 \qquad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x, 0) \;=\; f(x) \;=\; \left\{ \begin{array}{cl} x & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ -x + 1 & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{array} \right\} \qquad \text{für } x \in [0, 1].$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe der ungeraden Fortsetzung von $f(x)$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung $u(x, t)$ der Wärmeleitungsgleichung, die die obigen Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.