Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 14

Platzaufgaben

Platzaufgabe 40 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; u_{xx} + t\ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \quad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x) \quad \text{für } x \in [0,\pi]\ .$$

Wir suchen die Lösung in der Form $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx)\mathrm{e}^{-n^2 t}$.

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{b}_n(t)$ für $n \geqslant 1$ für die ungerade 2π-periodische Fortsetzung in x-Richtung von $r(x,t) = t$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von $\tilde{b}_n(t)$ aus (a) und der Anfangsbedingung $u(x,0) = \sin(x)$ die Funktionen $b_n(t)$ für $n \geqslant 1$.

(c) Geben Sie die Lösung $u(x,t)$ der angegebenen Wärmeleitungsgleichung unter den angegebenen Rand- und Anfangsbedingungen an.

Platzaufgabe 41 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; u_{xx} + t + 1 - \frac{x}{\pi}\ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = t, \quad u(\pi,t) = 1 \quad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x) + \frac{x}{\pi} \quad \text{für } x \in [0,\pi]\ .$$

(a) Reduzieren Sie das Problem mit inhomogenen Randbedingungen für $u(x,t)$ auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen für $\tilde{u}(x,t)$ wie in 8.2.11.

(b) Geben Sie eine Lösung für $\tilde{u}(x,t)$ an unter Verwendung von Platzaufgabe 40.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung für $u(x,t)$ unter Verwendung von (b).

Platzaufgabe 42 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} \;=\; 4u_{xx}\ ,$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x), \quad u_t(x,0) = x\cos(x^2) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\ .$$

(a) Berechnen Sie die Lösung der Wellengleichung unter den gegebenen Anfangsbedingungen mit der d'Alembertschen Formel.

(b) Überprüfen Sie durch eine direkte Rechnung, ob die in (a) berechnete Lösung $u(x,t)$ die partielle Differentialgleichung $u_{tt} = 4u_{xx}$ erfüllt.

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 14

Hausaufgaben

Abgabe bis Do 16.02.23 nur im **Ilias**.

Hausaufgabe 40 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \ = \ u_{xx} + t + x \ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0 \quad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 0 \quad \text{für } x \in [0,3] \ .$$

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{b}_n(t)$ für die ungerade 6-periodische Fortsetzung in x-Richtung von $r(x,t) = t + x$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der angegebenen Wärmeleitungsgleichung unter den angegebenen Rand- und Anfangsbedingungen.

Hausaufgabe 41 Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \ = \ u_{xx} + \tfrac{4}{3}x + 3t - \tfrac{2}{3}tx \ ,$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = t^2, \quad u(3,t) = 1 + t \quad \text{für } t \geqslant 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \tfrac{1}{3}x \quad \text{für } x \in [0,3] \ .$$

(a) Reduzieren Sie das Problem mit inhomogenen Randbedingungen für $u(x,t)$ auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen für $\tilde{u}(x,t)$ wie in 8.2.11.

(b) Geben Sie eine Lösung für $\tilde{u}(x,t)$ an unter Verwendung von Hausaufgabe 40.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung für $u(x,t)$ unter Verwendung von (b).

Hausaufgabe 42 Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} \ = \ 9u_{xx} \ ,$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = x\sin(x), \quad u_t(x,0) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \ .$$

(a) Berechnen Sie die Lösung der Wellengleichung unter den gegebenen Anfangsbedingungen.

(b) Überprüfen Sie durch eine direkte Rechnung, ob die in (a) berechnete Lösung $u(x,t)$ die partielle Differentialgleichung $u_{tt} = 9u_{xx}$ und die gegebenen Anfangsbedingungen erfüllt.