Jha, Künzer, Nottoli Wintersemester 2022/23

Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge

Blatt 15

Hausaufgaben

Keine Abgabe.

Hausaufgabe 43 Sei $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$.

(a) Man verifiziere: Es ist

$$u(x, y) \; = \; \ln\Big(\sqrt{x^2 + y^2}\Big)$$

eine Lösung der Potentialgleichung $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ auf D.

(b) Sei $u(x, y)$ eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktion auf D.

Sei $w(r, \varphi) := u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Man überprüfe unter Verwendung der Kettenregel für Funktionen zweier Veränderlicher:

$$w_\varphi(r, \varphi) \; = \; u_x(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot (-r\sin(\varphi)) + u_y(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot r\cos(\varphi).$$

Man berechne $w_r(r, \varphi)$, $w_{rr}(r, \varphi)$ und $w_{\varphi\varphi}(r, \varphi)$.

Man überprüfe:

$$w_{rr}(r, \varphi) + \tfrac{1}{r} w_r(r, \varphi) + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \; = \; u_{xx}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) + u_{yy}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \; .$$

Man bestätige: Es ist $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ auf D genau dann, wenn

$$(*) \qquad w_{rr}(r, \varphi) + \tfrac{1}{r} w_r(r, \varphi) + \tfrac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \; = \; 0$$

ist für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(c) Man verifiziere durch eine direkte Rechnung, dass

$$w(r, \varphi) \; = \; \ln(r)$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung $(*)$ ist.

Verifizieren Sie dies erneut unter Verwendung von (a) und (b).

Hausaufgabe 44 Sei

$$f \; : \; \mathbb{C} \to \mathbb{C} \; : \; z \; \mapsto \; f(z) := \sinh(z) \; .$$

Sei $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + \mathrm{i}y))$ und $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + \mathrm{i}y))$.

(a) Bestimmen Sie $u(x, y)$ und $v(x, y)$.

(b) Verifizieren Sie durch eine direkte Rechnung, dass $u(x, y)$ und $v(x, y)$ harmonische Funktionen sind, die die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen.

(c) Geben Sie ein quellen- und wirbelfreies Vektorfeld g auf $\mathbb{R}^2$ an mit $g_2(x, y) = \cosh(x)\sin(y)$.