Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 1

Platzaufgaben

Platzaufgabe 1

Sei $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Wir betrachten die Gerade, die durch die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ verläuft.

(a) Geben Sie eine normierte Parametrisierung der Geraden an.

(b) Rechnen Sie nach: Die Krümmung der Geraden ist an jeder Stelle gleich 0.

Platzaufgabe 2

Wir betrachten die Kurve in der x_1-x_2-Ebene, die durch

$$C(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} s\cos(\ln(s)) \\ s\sin(\ln(s)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}^+$.

(a) Skizzieren Sie die Kurve unter Verwendung eines Taschenrechners.

(b) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

(c) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ für $s > 0$.

(d) Bestimmen Sie den Normalenvektor $n(s)$ für $s > 0$.

(e) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und den Krümmungskreisradius $\rho(s)$ für $s > 0$.

(f) Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Krümmungskreises $M(s)$ für $s > 0$.

(g) Skizzieren Sie den Krümmungskreis für $s = 1$.

Künzer, Truong Wintersemester 2022/23

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 1

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 05.12.22 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 1

Wir betrachten die Kurve, die durch

$$C(s) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} s\cos(\ln(s)) \\ s\sin(\ln(s)) \\ s \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}^+$.

(a) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

(b) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$ für $s > 0$.

(c) Bestimmen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und den Krümmungskreisradius $\rho(s)$ für $s > 0$.

(d) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $M(s)$ des Krümmungskreises für $s > 0$.

Hausaufgabe 2

Wir betrachten die Kurve in der x_1-x_2-Ebene, die durch

$$C(s) \;=\; \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh}(s) \\ \sqrt{1+s^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird, wobei $s \in \mathbb{R}$.

(a) Rechnen Sie nach: Es liegt eine normierte Parametrisierung vor.

(b) Überprüfen Sie: Es parametrisiert $C(s)$ den Graphen $x_2 = \cosh(x_1)$.
Skizzieren Sie die Kurve in der x_1-x_2-Ebene.

(c) Bestimmen Sie den Tangentenvektor $v(s)$ und den Normalenvektor $n(s)$.

(d) Bestimmen Sie den Radius $\rho(s)$ und den Mittelpunkt $M(s)$ des Krümmungskreises.
Zeichnen Sie den Krümmungskreis für $s = 0$ in die Skizze aus (b) ein.