Künzer, Truong Wintersemester 2022/23

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 3

Platzaufgaben

Platzaufgabe 5

(a) Man parametrisiere den Zylinder $Z := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$.

(b) Wir betrachten die Ebene $S = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0 \}$.
Man parametrisiere die Kurve $K := Z \cap S$.

(c) Man bestimme E, F und G für die Parametrisierung des Zylinders aus (a).

(d) Man bestimme die Länge von K auf zwei Arten:
Einmal direkt und einmal unter Verwendung von E, F und G.
Die Integrale brauchen nicht ausgewertet zu werden.

Platzaufgabe 6

(a) Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$,
wobei $\vartheta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.
Man skizziere die Schnitte mit den Koordinatenebenen in ein Koordinatensystem.
Was für eine Fläche S wird von Φ parametrisiert?

(b) Man bestimme E, F und G für die Parametrisierung Φ.

(c) Man bestimme den Flächeninhalt von S unter Verwendung von E, F und G.
Das Integral braucht nicht ausgewertet zu werden.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 3

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 19.12.22 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 5

(a) Wir betrachten den Kreis $K_1 := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 1 \}$ in der x_1-x_2-Ebene.

Man parametrisiere den Torus $T \subseteq \mathbb{R}^3$, der durch Rotation von K_1 um die x_1-Achse entsteht.

(b) Wir betrachten die Halbebene $H = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3,\ x_2 \geqslant 0 \}$.

Man parametrisiere die Kurve $K := T \cap H$.

(c) Man bestimme E, F und G für die Parametrisierung des Torus aus (a).

(d) Man bestimme die Länge von K auf zwei Arten:

Einmal direkt und einmal unter Verwendung von E, F und G.

Hausaufgabe 6

(a) Wir betrachten die Parametrisierung $\Phi(\varphi, u) := \begin{pmatrix} \cosh(u) \\ \sinh(u)\cos(\varphi) \\ \sinh(u)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$,

wobei $u \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Man überprüfe: Es parametrisiert Φ das Hyperboloid $H = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1,\ x_1 \geqslant 0 \}$.

Man skizziere die Schnitte mit den Koordinatenebenen in ein Koordinatensystem.

(b) Man bestimme E, F und G für die Parametrisierung Φ.

(c) Man bestimme den Flächeninhalt von $H \cap \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1 \}$ unter Verwendung von E, F und G.

Das Integral braucht nicht ausgewertet zu werden.