Künzer, Truong Wintersemester 2022/23

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 5

Platzaufgaben

Platzaufgabe 9

(a) Man überprüfe: Eine Gerade in der x_1-x_2-Ebene ist eine Geodäte.

(b) Wir begeben uns in die Situation von §2.3.

Sei $c(t)$ gegeben, wobei $t \in I$.

Sei dabei $\Phi(c(t))$ die Parametrisierung einer Geodäte auf der Fläche S.

Sei $\hat{c}(t) := c(2t)$, wobei $2t \in I$.

Man überprüfe anhand der Geodäten-Bedingung: Es ist auch $\hat{c}(t)$ die Parametrisierung einer Geodäte auf der Fläche S.

Dies sollte auch so sein, denn natürlich parametrisieren $\Phi(c(t))$ und $\Phi(\hat{c}(t))$ dieselbe Kurve auf der Fläche S.

Platzaufgabe 10

Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$ mit $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$ den Torus T; vgl. Hausaufgabe 5.

Sei $c(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Es parametrisiert $\Phi(c(\varphi)) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 2+\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ den Kreis K_1 auf dem Torus; vgl. Hausaufgabe 5.

Man überprüfe anhand der Geodäten-Bedingung: Es ist K_1 eine Geodäte auf T.

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 5

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 16.01.23 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 9
Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \psi) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{smallmatrix}\right)$ mit $\varphi,\ \psi\ \in\ [0, 2\pi]$ den Torus T; vgl. Hausaufgabe 5.

Sei $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$. Sei $c(\psi) = \left(\begin{smallmatrix} \varphi_0 \\ \psi \end{smallmatrix}\right)$ für $\psi \in [0, 2\pi]$.
Es parametrisiert $\Phi(c(\psi))$ die Kurve $K_{\varphi_0} := \Phi(c([0, 2\pi]))$ auf T.

Für welche Werte von φ_0 ist die Kurve K_{φ_0} eine Geodäte auf T ?

Hausaufgabe 10
Es parametrisiert $\Phi(u, v) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ u^2-v^2 \end{smallmatrix}\right)$ für $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in D := \mathbb{R}^2$ ein hyperbolisches Paraboloid P.

(a) Sei $c(t) := \left(\begin{smallmatrix} t \\ t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in I := \mathbb{R}$. Ist die Kurve $K_1 := \Phi(c(\mathbb{R}))$ eine Geodäte auf P ?

(b) Sei $c(t) := \left(\begin{smallmatrix} t \\ 2t \end{smallmatrix}\right)$ für $t \in I := \mathbb{R}$. Ist die Kurve $K_2 := \Phi(c(\mathbb{R}))$ eine Geodäte auf P ?