Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 7

Platzaufgaben

Platzaufgabe 13

Es parametrisiert $\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$ ein Rotationsparaboloid P, wobei $u,\ v \in \mathbb{R}$.
Vgl. Platzaufgaben 8, 12.

Sei $c(u) := \binom{u}{1}$ für $u \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Kurve K, die durch $C(u) := \Phi(c(u))$ parametrisiert wird.

(a) Man skizziere P und darauf die Kurve K.

(b) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ die Krümmung κ von K durch eine direkte Berechnung. Vgl. Platzaufgabe 3.

(c) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ den Wert von $\cos(\nu)$ für den Winkel ν zwischen dem Normalenvektor n von K und dem Vektor $\mathfrak{n} = \Phi_u \times \Phi_v$ senkrecht auf P durch eine direkte Berechnung.

(d) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ den Wert von

$$\kappa \cdot \cos(\nu)$$

unter Verwendung von E, F, G, L, M, N.

Man vergleiche mit (b) und (c).

Künzer, Truong Wintersemester 2022/23

Differentialgeometrie für Geodäten

Blatt 7

Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 30.01.23 in den Gruppenübungen.

Hausaufgabe 13

Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$ mit $\varphi,\ \psi\ \in\ [0, 2\pi]$ einen Torus T.
Vgl. Hausaufgaben 5, 9, 11.

Sei $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$. Sei $c(\psi) := \binom{\varphi_0}{\psi}$ für $\psi \in [0, 2\pi]$.

Wir betrachten die Kurve K, die durch $C(\psi) := \Phi(c(\psi))$ parametrisiert wird.

(a) Man skizziere T und darauf die Kurve K.

(b) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ die Krümmung κ von K durch eine geometrische Überlegung.

(c) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ den Wert von $\cos(\nu)$ für den Winkel ν zwischen dem Normalenvektor n von K und dem Vektor $\mathfrak{n} = \Phi_\varphi \times \Phi_\psi$ senkrecht auf T durch eine geometrische Überlegung.

(d) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ den Wert von $\kappa \cdot \cos(\nu)$ unter Verwendung von E, F, G, L, M, N.

Man vergleiche mit (b) und (c).

Hausaufgabe 14

Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ ein Ellipsoid S, wobei $\vartheta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.
Vgl. Hausaufgaben 8, 12.
Sei $c(\varphi) := \binom{\varphi}{\pi/4}$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Wir betrachten die Kurve K, die durch $C(\varphi) := \Phi(c(\varphi))$ parametrisiert wird.

(a) Man skizziere S und darauf die Kurve K.

(b) Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ die Krümmung κ von K durch eine geometrische Überlegung.

(c) Wir betrachten im Punkt $\Phi(c(0))$ den Winkel ν zwischen dem Normalenvektor n von K und dem Vektor $\mathfrak{n} = \Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta$ senkrecht auf S.

Man bestimme im Punkt $\Phi(c(0))$ den Wert von $\kappa \cdot \cos(\nu)$ unter Verwendung von E, F, G, L, M, N.

Man bestimme in diesem Punkt nun $\cos(\nu)$ unter Verwendung von (b).