Differentialgeometrie für Geodäten

# Blatt 8

## Platzaufgaben

### Platzaufgabe 14

Sei $S$ eine Kugel von Radius $R > 0$.

(a) Man bestimme für jeden Punkt von $S$ die Hauptkrümmungen.

Man vergleiche dort das Produkt der beiden Hauptkrümmungen mit $\mathrm{K}_{\text{Gauß}}$.

(b) Wie ändern sich die Hauptkrümmungen, wenn man die Reihenfolge der parametrisierenden Variablen vertauscht?

Wie ist dies geometrisch begründbar? Wie ist dies rechnerisch begründbar?

### Platzaufgabe 15

Es parametrisiert $\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$ ein Rotationsparaboloid $P$, wobei $u, v \in \mathbb{R}$.
Vgl. Platzaufgaben 8, 12, 13.

(a) Man bestimme an der Stelle $\binom{u}{v} = \binom{0}{0}$ die Hauptkrümmungen.

(b) Man bestimme an der Stelle $\binom{u}{v} = \binom{1}{1}$ die Hauptkrümmungen und zugehörige Hauptkrümmungsvektoren.

Differentialgeometrie für Geodäten

# Blatt 8

## Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 06.02.23 in den Gruppenübungen.

**Hausaufgabe 15**

Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$ mit $\varphi,\, \psi \in [-\pi, \pi]$ einen Torus $T$.
Vgl. Hausaufgaben 5, 9, 11, 13.

(a) Man bestimme für jeden Punkt von $T$ die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsvektoren.

(b) Wo liegen die Punkte auf $T$ mit Hauptkrümmungen von verschiedenem Vorzeichen? Welches Vorzeichen hat dort die Gaußsche Krümmung?

(c) Wir betrachten die Stelle $\binom{\varphi}{\psi} = \binom{\pi/2}{0}$.

Man parametrisiere Kurven auf $T$, welche durch $\Phi(\frac{\pi}{2}, 0)$ laufen und welche die Hauptkrümmungen bis auf Vorzeichen an dieser Stelle als Krümmungen haben.

Man skizziere $T$ mit beiden Kurven darin.

Man berechne deren Krümmung an dieser Stelle direkt und vergleiche.

**Hausaufgabe 16**

Es parametrisiert $\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2-v^2 \end{pmatrix}$ für $\binom{u}{v} \in D := \mathbb{R}^2$ ein hyperbolisches Paraboloid $P$.
Vgl. Hausaufgabe 10.

(a) Man bestimme an der Stelle $\binom{u}{v} = \binom{0}{0}$ die Hauptkrümmungen.

Man parametrisiere Kurven auf $P$, welche durch $\Phi(0, 0)$ laufen und welche die Hauptkrümmungen bis auf Vorzeichen an dieser Stelle als Krümmungen haben.

Man skizziere $P$ mit beiden Kurven darin.

Man berechne deren Krümmung an dieser Stelle direkt und vergleiche.

(b) Man bestimme an der Stelle $\binom{u}{v} = \binom{2}{1}$ die Hauptkrümmungen und zugehörige Hauptkrümmungsvektoren.