Differentialgeometrie für Geodäten

# Blatt 9

## Platzaufgaben

### Platzaufgabe 16

Man verwende Gauß-Bonnet, Version 1, um herzuleiten:
Die Winkelsumme in einem Dreieck in der Ebene beträgt $\pi = 180°$.

### Platzaufgabe 17

Sei $R > 0$. Wir betrachten die Kugel $S$ von Radius $R$, die durch $\Phi(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ parametrisiert wird, wobei $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\vartheta \in [0, \pi]$.

Wir betrachten folgendes Dreieck $A$ auf $S$.

Sei $c_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta \end{pmatrix}$ mit $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Es parametrisiere $\Phi(c_1(t))$ die Kurve $K_1$ auf $S$.

Sei $c_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Es parametrisiere $\Phi(c_2(t))$ die Kurve $K_2$ auf $S$.

Sei $c_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} - \vartheta \end{pmatrix}$ mit $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Es parametrisiere $\Phi(c_3(t))$ die Kurve $K_3$ auf $S$.

Sei nun $A$ das von $K_1$, $K_2$ und $K_3$ berandete Dreieck auf $S$.

(a) Man skizziere $A$ auf $S$.

(b) Man wende Gauß-Bonnet, Version 1, auf $A$ an.

Künzer, Truong Wintersemester 2022/23

Differentialgeometrie für Geodäten

# Blatt 9

## Hausaufgaben

Abgabe bis Mo 13.02.23 im **Ilias**.

Es parametrisiert $\Phi(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \cos(\psi)(2+\sin(\varphi)) \\ \sin(\psi)(2+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$ mit $\varphi,\ \psi\ \in\ [0, 2\pi]$ einen Torus $T$.

Vgl. Hausaufgaben 5, 9, 11, 13, 15.

**Hausaufgabe 17**

Man verifiziere das Theorema egregium für die Gaußsche Krümmung des Torus $T$, wie oben parametrisiert.

**Hausaufgabe 18**

Man verifiziere Gauß-Bonnet, Version 2, für den Torus $T$, wie oben parametrisiert.