Höhere Mathematik 3 für Ingenieurstudiengänge **FREITAG**

Blatt 1

Vortragsübung am Mi 26.10.22, Fr 28.10.22

Aufgabe 1 (Der Satz von Fubini und Normalbereiche)
Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = y\cos(x^2)$ über dem Bereich

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}.$$

Aufgabe 2 (Der Satz von Fubini und Normalbereiche)
Wir betrachten die zwei folgenden Integrale.

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos(y)} x^2 \sin(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\pi/4} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} xy\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

Skizzieren Sie jeweils den Integrationsbereich in der xy-Ebene. Welcher Art von Normalbereich ist der jeweilige Integrationsbereich? Berechnen Sie die Integrale.

Aufgabe 3 (Volumen von Drehkörper)
Es sei $r\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $r(x) = \sin(x)$. Skizzieren Sie den Drehkörper, der bei Rotation des Graphen von r um die x-Achse im xyz-Raum entsteht. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers.

Aufgabe 4 (Kurvenintegrale und Satz von Green)
Berechnen Sie die Rotation der Vektorfelder

$$\text{(a)} \quad g(x_1,x_2) = (x_2^2 \sin(x_1), x_1^2 + \cos(x_2))^{\mathrm{T}} \qquad \text{(b)} \quad h(x_1,x_2) = (-x_2 \sin(x_1), x_2 + \cos(x_1))^{\mathrm{T}}$$

sowie die Integrale $\int_{\mathcal{C}} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ und $\int_{\mathcal{C}} h(x) \bullet \mathrm{d}x$ längs der parabelförmigen Kurve

$$\mathcal{C} = \{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid -a^2 \leqslant x_1 \leqslant 0, \quad x_1 = -a^2 + x_2^2\},$$

wobei $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

A1/1

Aufgabe 1

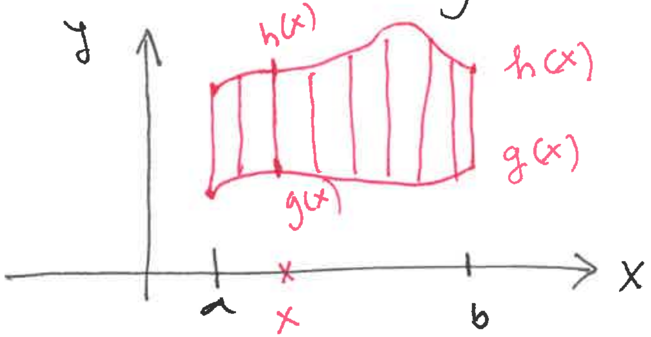
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = y\cos(x^2)$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{array} \right\}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = ?$$

Widerholung :

Normalbereich bzgl. x-Achse



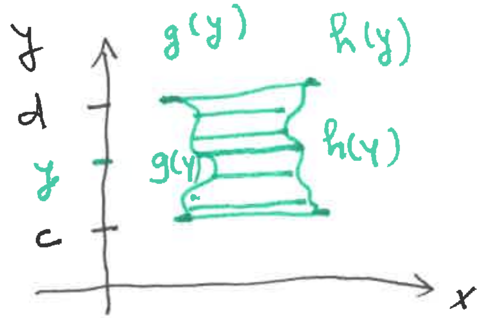
$$a \le x \le b$$

$$g(x) \le y \le h(x)$$

$g, h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{array} \right\}$$

Normalbereich bzgl. y-Achse.



$$c \le y \le d$$

$$g(y) \le x \le h(y)$$

$g, h : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} c \le y \le d \\ g(y) \le x \le h(y) \end{array} \right\}$$

A1/2

Satz von Fubini (Satz 1.3.4)

$D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

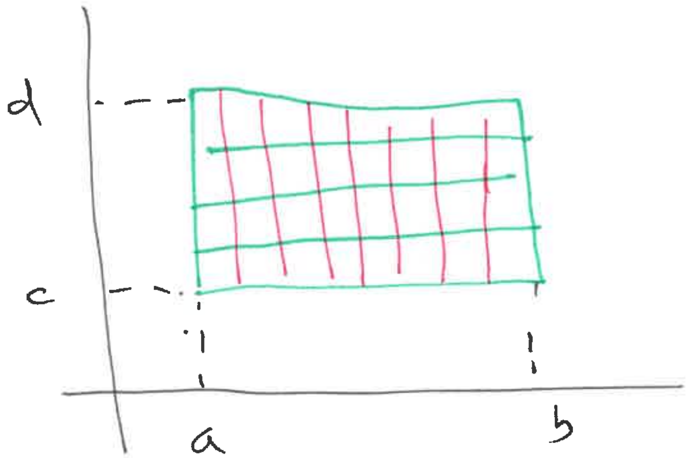
D Normalbereich bzgl. x-Achse

$$= \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$\parallel$ wenn D beides

D Normalbereich bzgl. y-Achse

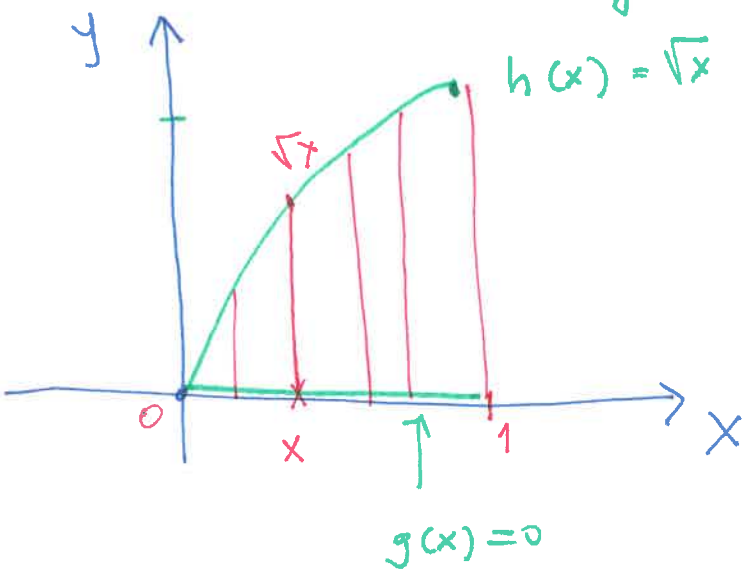
$$= \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$



A1/3

$$f(x,y) = y\cos(x^2)$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \boxed{0 \le x \le 1} \\ \underset{\substack{\| \\ g(x)}}{0} \le y \le \underset{\substack{\| \\ h(x)}}{\sqrt{x}} \end{array} \right\}$$



Normalbereich bzgl. x-Achse

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$\|$ Satz von Fubini

$$\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{x}} \underline{y\cos(x^2)\,dy} \right) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[\frac{y^2\cos(x^2)}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_{x=0}^{1} \left(\frac{(\sqrt{x})^2\cos(x^2)}{2} - \underbrace{\frac{0^2\cos(x^2)}{2}}_{=0} \right) dx$$

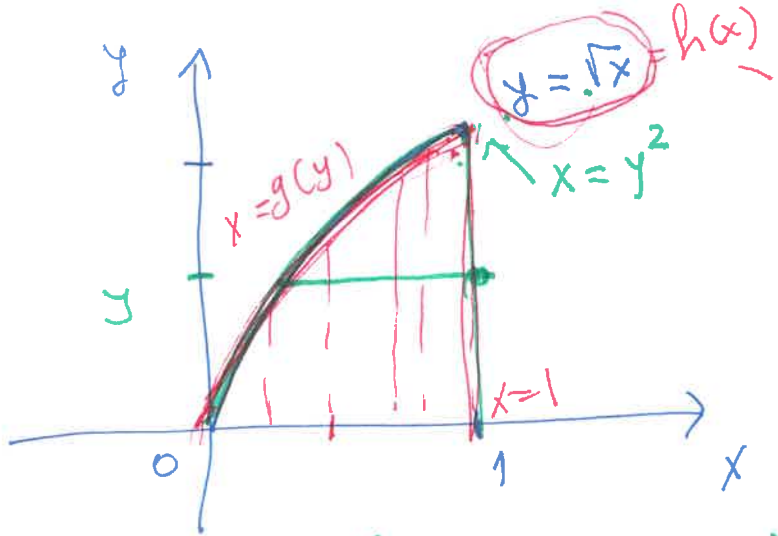
$$= \int_{x=0}^{1} \frac{x}{2}\cos(x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}\sin(x^2)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4}\sin(1) - \frac{1}{4}\underbrace{\sin(0)}_{=0} = \frac{1}{4}\sin(1).$$

A1/4

$$\left(\sin(x^2)\right)' = \cos(x^2)\cdot(x^2)' = 2x\cos(x^2)$$

Frage: Können wir D als Normalbereich bzgl. y-Achse betrachten?



$$0 \le y \le 1$$
$$y^2 \le x \le 1$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le 1 \end{array} \right\}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y^2}^{1} y \boxed{\cos(x^2)}\,dx \right) dy$$

A 1/5

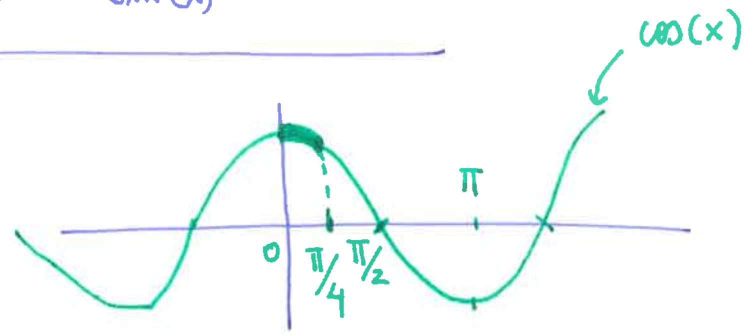
Das Problem: Wir brauchen eine Stammfunktion von $\cos(x^2)$.

Aufgabe 2 (Ich habe nicht geschafft, diese Lösung in der VÜ zu zeigen).

ⓐ $$\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos(y)} x^2 \sin(y)\,dx\,dy$$

ⓑ $$\int_0^{\pi/4}\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} x\,y\,dy\,dx$$

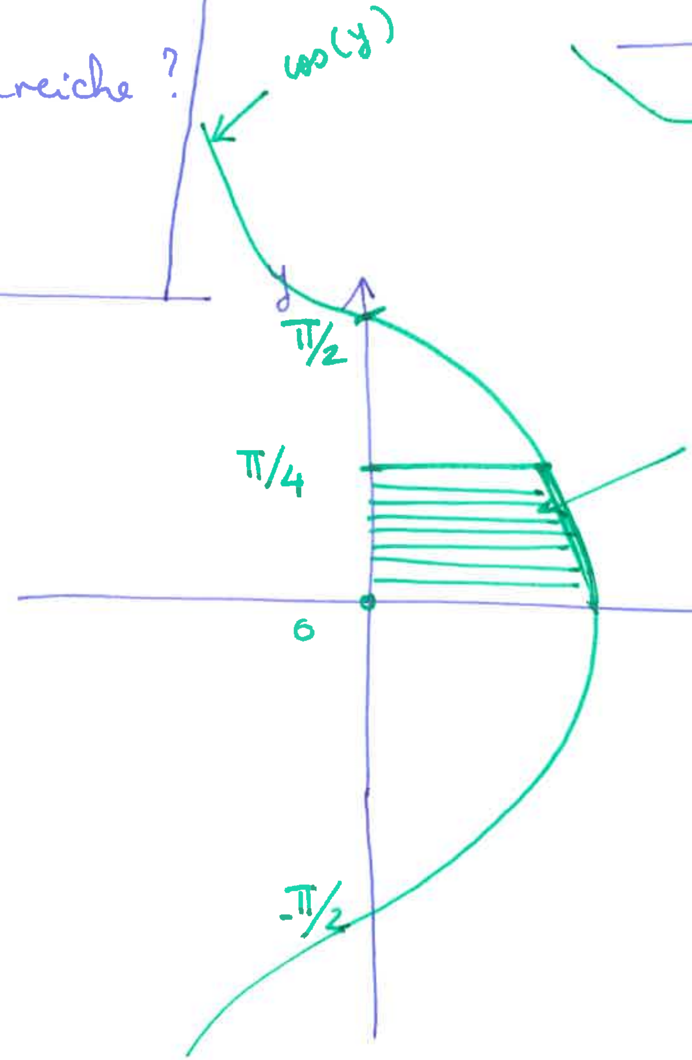
- Skizziere Integrationsbereiche
- Welcher Art von Normalbereiche?
- Berechne.



ⓐ $$\int_{y=0}^{y=\pi/4}\left(\int_{x=0=g(y)}^{x=\cos y=h(y)} x^2 \sin(y)\,\underline{\underline{dx}}\right)dy$$

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq x \leq \underset{\substack{\| \\ h(y)}}{\cos(y)}$$



$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq y \leq \pi/4 \\ 0 \leq x \leq \cos(x) \end{array}\right\}$$

Normalbereich bzgl. y-Achse

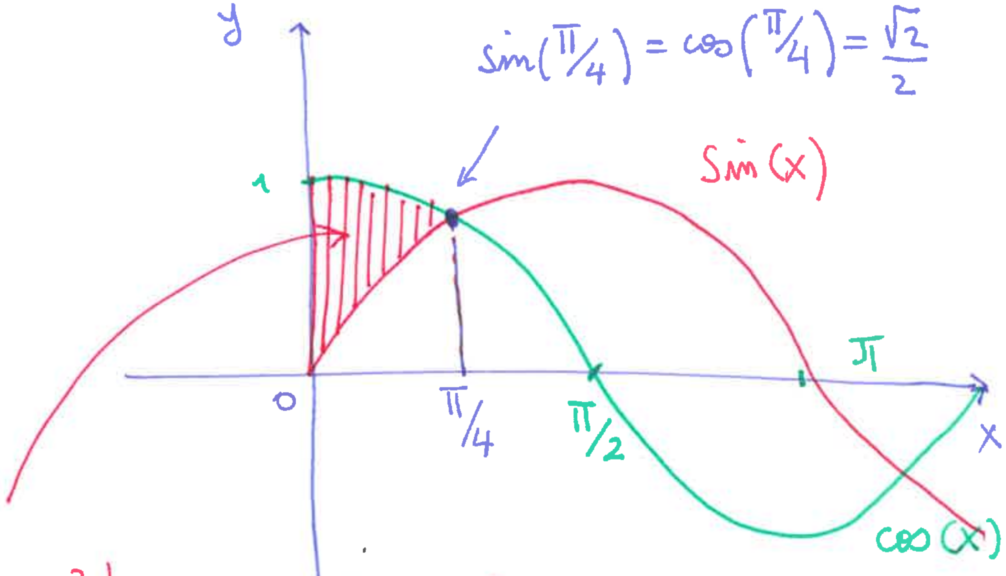
$$\int_{y=0}^{y=\pi/4} \left(\int_{x=0}^{x=\cos(y)} x^2 \sin(y)\, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \left[\frac{x^3}{3} \sin(y) \right]_{x=0}^{x=\cos(y)} dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=\pi/4} \left(\frac{\cos^3(y)}{3} \underbrace{\sin(y)}_{= (-\cos(y))'} - \underbrace{\frac{0^3}{3} \sin(y)}_{=0} \right) dy$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{y=0}^{y=\pi/4} \cos^3(y) \left(\cos(y)\right)' dy = -\frac{1}{3} \left[\frac{\cos^4(y)}{4} \right]_{y=0}^{\pi/4}$$

$$= -\frac{1}{12} \left(\cos^4\left(\pi/4\right) - \cos^4(0) \right) = -\frac{1}{12} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 \right) = \frac{1}{16}.$$

(b) $$\int_{x=0}^{x=\pi/4} \int_{y=\sin(x)=g(x)}^{y=\cos(x)=h(x)} x\,y\,dy\,dx$$



$$0 \le x \le \pi/4$$

$$\sin(x) \le y \le \cos(x).$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le x \le \pi/4 \\ \sin(x) \le y \le \cos(x) \end{array} \right\}$$

Normalbereich bzgl. x-Achse.

$$\int_{x=0}^{x=\pi/4} \left(\int_{y=\sin(x)}^{y=\cos(x)} x\,y\,dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=\pi/4} \left[x\,\frac{y^2}{2} \right]_{y=\sin(x)}^{y=\cos(x)}$$

$$= \int_{x=0}^{x=\pi/4} \left(x\,\frac{\cos^2(x)}{2} - x\,\frac{\sin^2(x)}{2} \right) dx = \int_{x=0}^{x=\pi/4} \frac{x}{2} \cos(2x)\,dx = \ldots$$

A3/1

Aufgabe 3 :

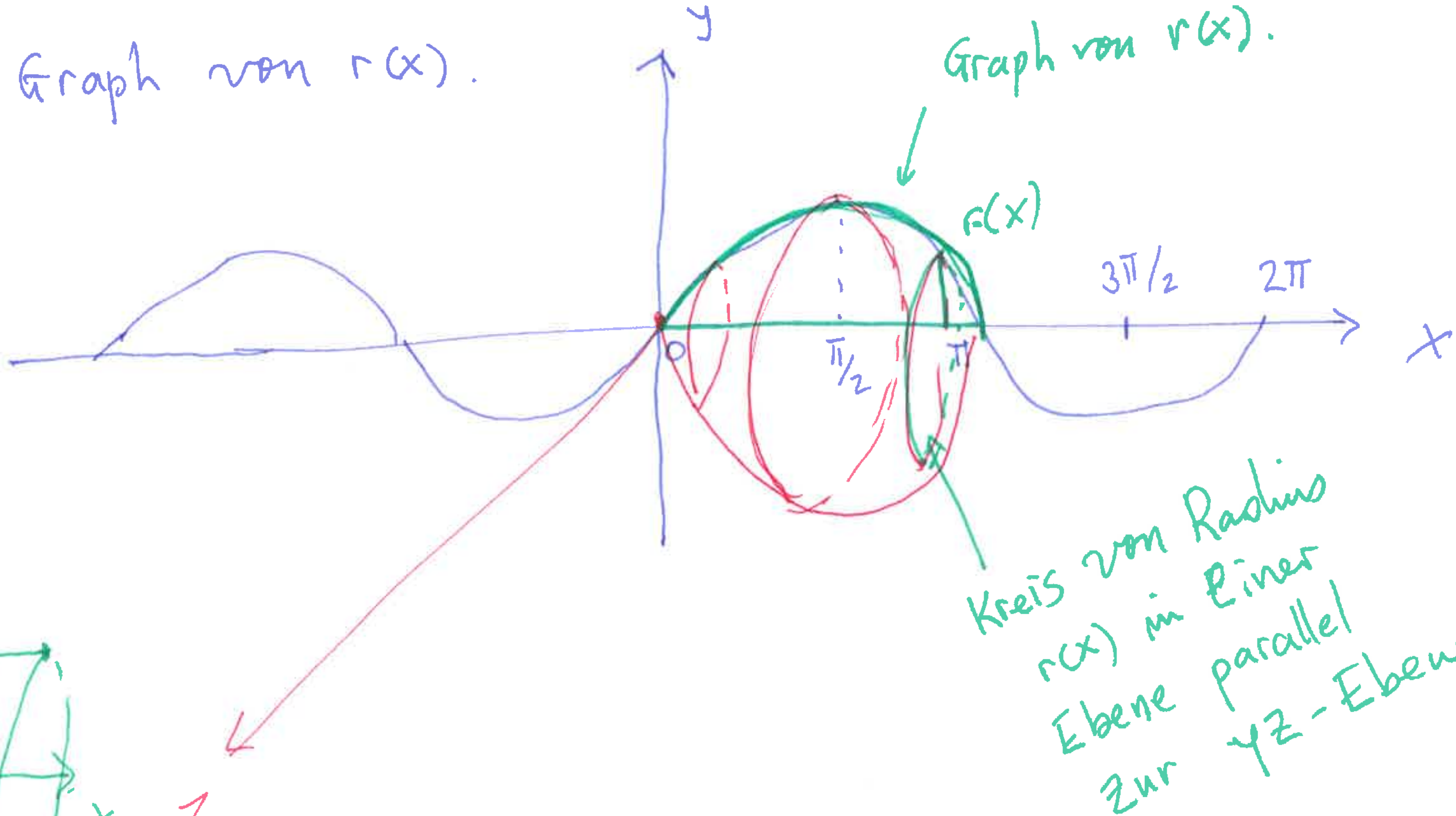
$r : \boxed{[0,\pi]} \longrightarrow \mathbb{R}.$

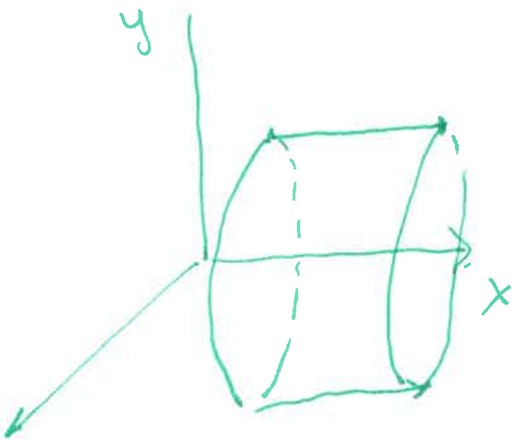
$r(x) = \sin(x).$

Drehkörper = ~~Drehung~~ Rotation Graph von $r(x)$ um x-Achse in xyz-Raum.

Volumen = ?

Lösung : • Graph von $r(x)$.





A3/2

- Volumen = ?

$r: [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

Formel aus Vorlesung.

$$\boxed{\begin{aligned} &r: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ &V = \pi \int_{x=a}^{b} r(x)^2 \, dx \end{aligned}}$$

$$V = \pi \int_{x=0}^{\pi} r(x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{x=0}^{\pi} \left(\sin(x)\right)^2 dx$$

$$= \pi \left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right)} \right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \pi \, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Aufgabe 4 :

A4/1

ⓐ $$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 \sin(x_1) \\ x_1^2 + \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}(g) = ?$$

K

$$\int_K g(x) \cdot dx = ?$$

ⓑ $$h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \sin(x_1) \\ x_2 + \cos(x_1) \end{pmatrix}$$

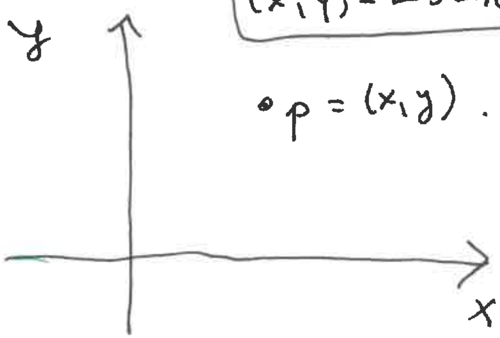
$$\operatorname{rot}(h) = ?$$

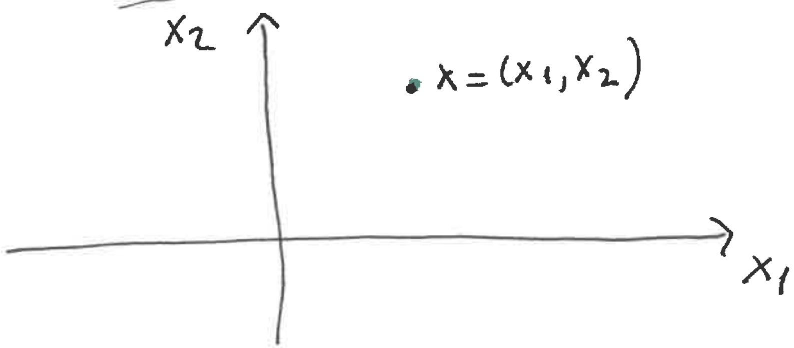
$$\int_K h(x) \cdot dx = ?$$

Vektorfelder in der Ebene

Bemerkung ①. Man arbeitet in (x_1, x_2)-Koordinaten statt (x, y)-Koordinaten

$\boxed{(x,y)\text{-Ebene}}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{(x_1,x_2)\text{-Koordinaten}}$





A 4/2

Bemerkung 2:

- Funktionen in $\mathbb{R}^2$ $\quad f : \underset{\substack{\cap \text{ offen} \\ \mathbb{R}^2}}{\mathbb{B}} \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

- Vektorfelder in der Ebene (x_1, x_2)-Koordinaten

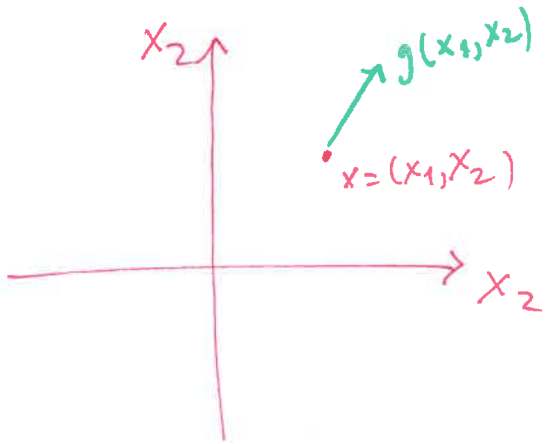
$$g : \underset{\substack{\cap \text{ offen} \\ \mathbb{R}^2}}{D} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}^2}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Definition: Die Rotation eines Vektorfeldes in $\mathbb{R}^2$

$$\operatorname{rot}(g) : \underset{\substack{\cap \text{ offen} \\ \mathbb{R}^2}}{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\operatorname{rot}(g)\,(x_1, x_2) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}$$



A4/3

ⓐ $g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 \sin(x_1) \\ x_1^2 + \cos(x_2) \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot}(g)(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + \cos(x_2)\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2^2 \sin(x_1)\right)$$

$$= 2x_1 + 0 - 2x_2 \sin(x_1)$$

$$= 2x_1 - 2x_2 \sin(x_1).$$

ⓑ $h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \sin(x_1) \\ x_2 + \cos(x_1) \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot}(h)(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2 + \cos(x_1)\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-x_2 \sin(x_1)\right).$$

$$= -\sin(x_1) - \left(-\sin(x_1)\right)$$

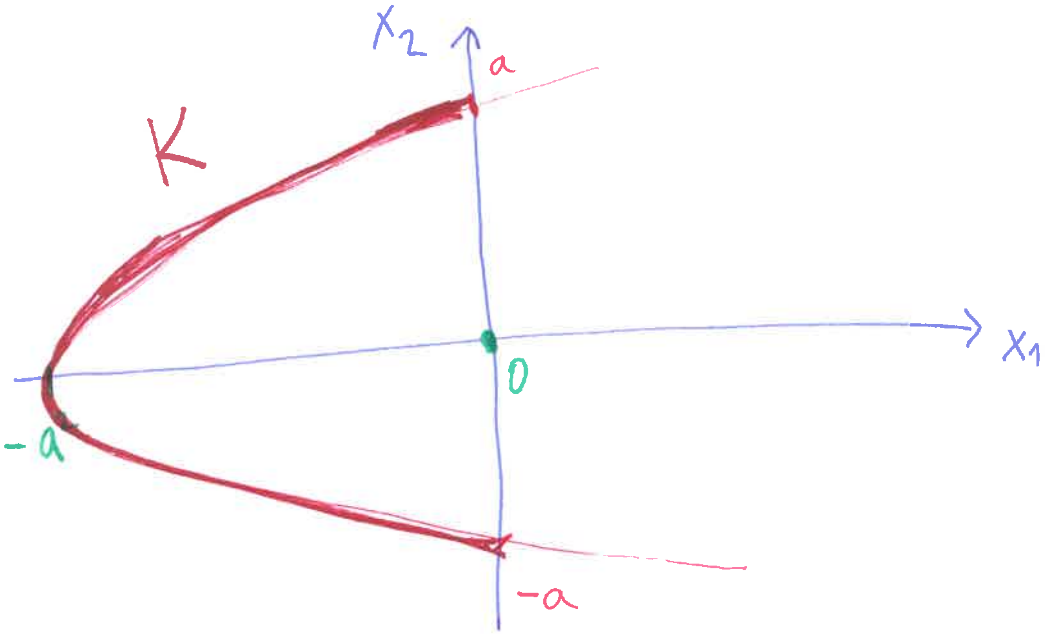
$$= 0$$

Zweites Teil:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \boxed{-a^2 \leq x_1 \leq 0} \; * \\ \boxed{x_1 = -a^2 + x_2^2} \end{array} \right\} \quad \text{wobei } \underline{a > 0}.$$

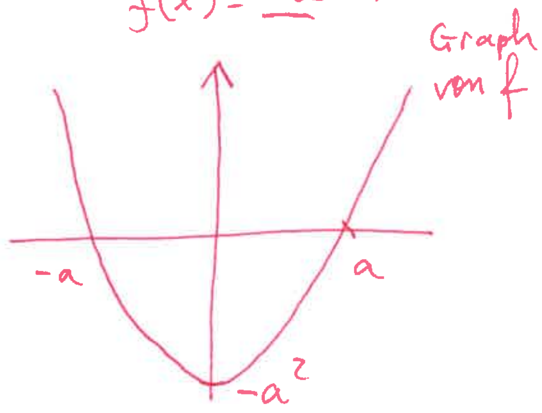
$f(x_2)$

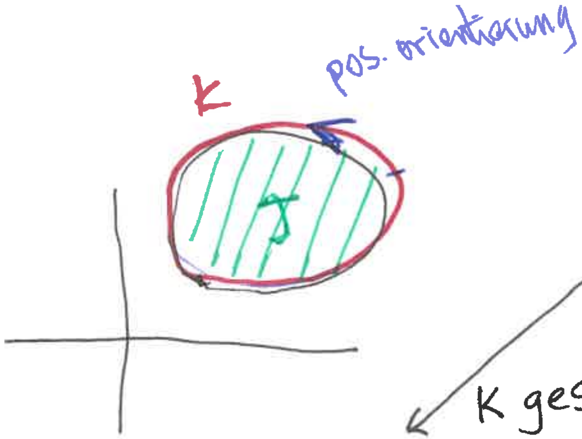
Wir wollen: $\displaystyle\int_K g(x) \cdot dx$ und $\displaystyle\int_K h(x) \cdot dx$.



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \underline{-a^2} + x^2$





$$\int_K g(x)\cdot dx = \int_{t=a}^{b} \big(g(c(t))\cdot c'(t)\big)\,dt$$

C parametrisierung

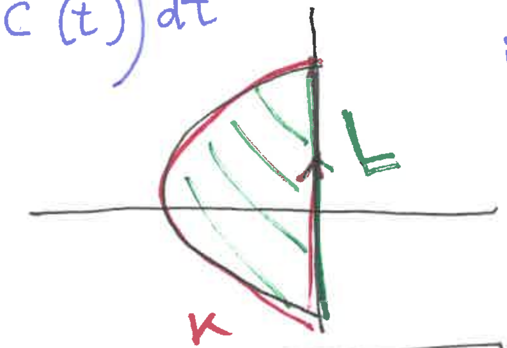
$C : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

Bild $C = K$

A4/5

K geschlossen

K nicht geschlossen



Satz von Green

$$\int_K g(x)\cdot dx = \iint_J \operatorname{rot}(g)\, dx_1 dx_2$$

mit positive Orientierung.

K nicht geschlossen

Für g (a)

rot(g) nicht schön

$$\int_K g(x)\cdot dx$$

Direkt mit einer Parametrisierung

rot(g) = 0

Für h (b)

Schliesse die Kurve

$K \cup L$

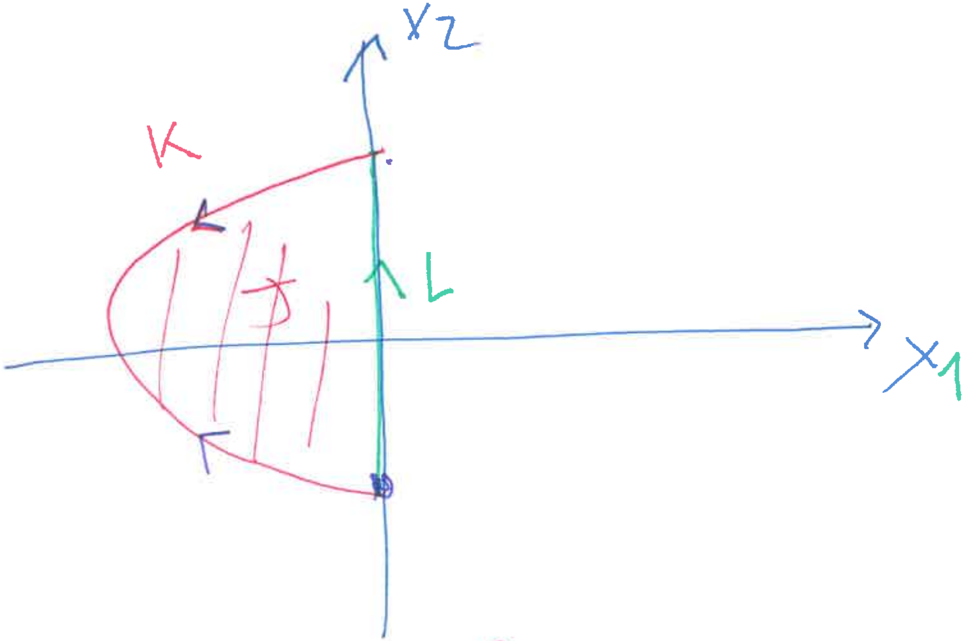
Green

$$\int_{K\cup L} g(x)\cdot dx = \int_J \operatorname{rot}(g)\cdot dx$$

$$\int_{K\cup L} g(x)\cdot dx = \int_K g(x)\cdot dx + \int_L g(x)\cdot dx$$

A4/6

(b) Für h, wir haben $\operatorname{rot}(h) = 0$



$$\int_{K\cup L} h(x)\cdot dx = \int_J \underbrace{\operatorname{rot}(h)}_{=0}\, dx_1 dx_2 = 0$$

$$\|$$

$$\int_K h(x)\cdot dx + \int_L h(x)\cdot dx$$

Parametriesierung für L

$$E(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$-a \le t \le a$$

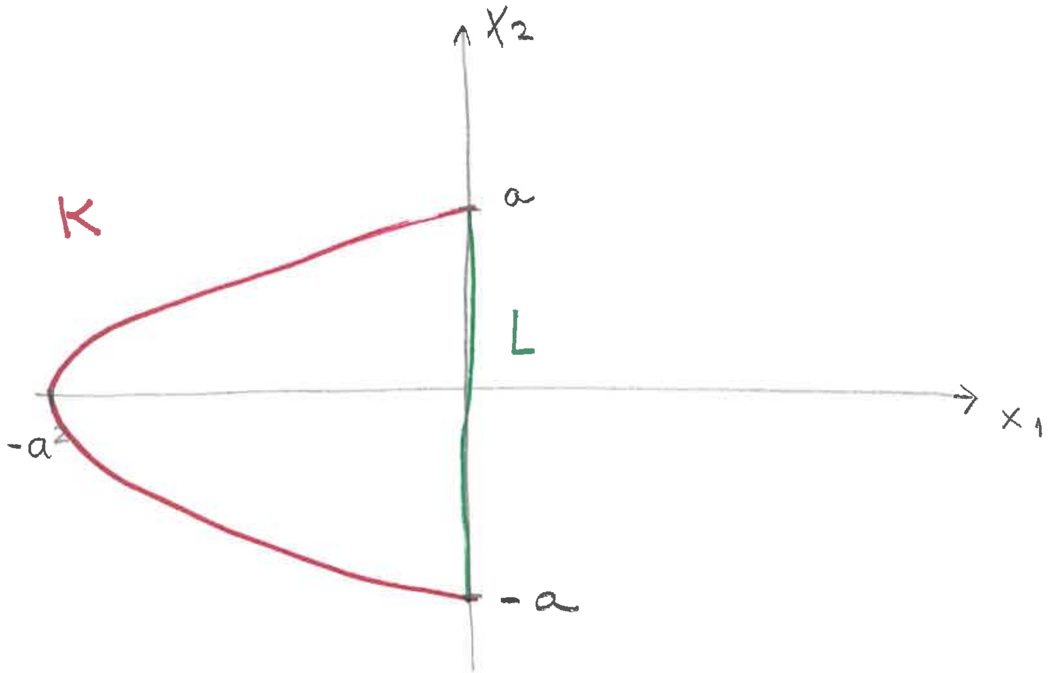
$$E'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_L h(x)\cdot dx = \int_{t=-a}^{a} h(E(t))\cdot E'(t)\, dt$$

$$= \int_{t=-a}^{a} \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{t=-a}^{a} (t+1)\, dt = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{t=-a}^{a} = 2a.$$

Hier sind die Berechnungen des Integrals, für die ich während der Vortragsübung keine Zeit hatte.



ⓐ $\int_K g(x) \cdot dx$

- Die Kurve K ist nicht geschlossen.
- $\mathrm{rot}(g)(x_1,x_2) = 2x_1 - 2x_2 \sin(x_1)$

Also: es macht nicht Sinn, den Satz von Green zu nutzen, da rot(g) nicht so einfach ist.

(wir werden sehen, dass für h mit $\mathrm{rot}(h) = 0$ macht Sinn die Kurve K zu $K \cup L$ zu schliessen und Satz von Green anzuwenden.)

Also: wir wollen die Kurveintegral $\int_K g(x) \cdot dx$ berechnen.

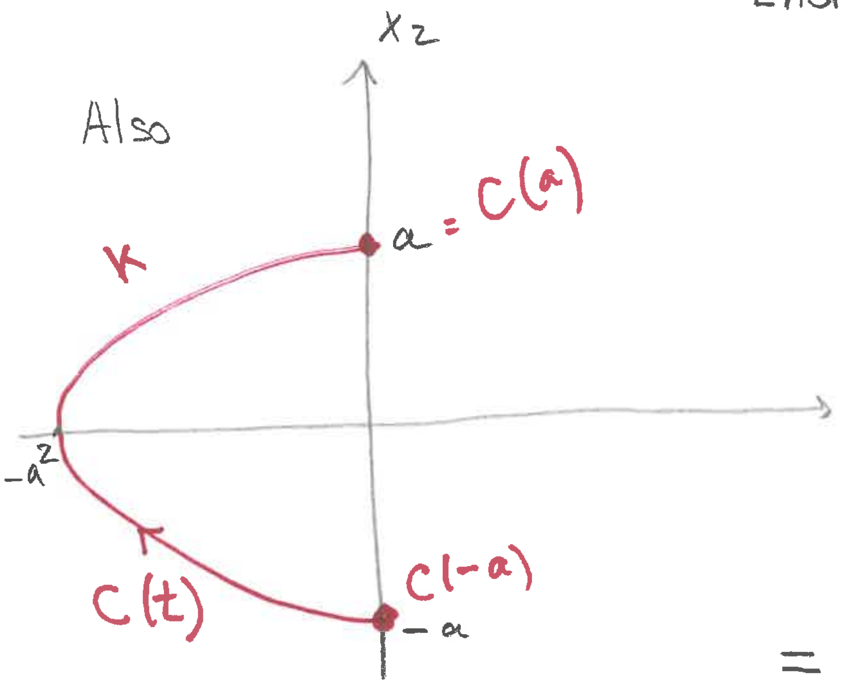
Dafür brauchen wir eine Parametriesierung von K:

Parametriesierung: $$C(t) = \begin{pmatrix} -a^2+t^2 \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } -a \leq t \leq a.$$

Anfang Punkt: $C(-a) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}$

End Punkt: $C(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$.

Also



$$C'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann: $$\int_K g(x) \cdot dx = \int_{-a}^{a} g(C(t)) \circ C'(t)\, dt$$

$$= \int_{-a}^{a} \begin{pmatrix} t^2 \sin(-a^2+t^2) \\ (-a^2+t^2)^2 + \cos(t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-a}^{a} \left(2t^3 \sin(-a^2+t^2) + (-a+t^2)^2 + \cos t \right) dt$$

$$= \underbrace{\int_{-a}^{a} \underbrace{2t^3 \sin(-a^2+t^2)}_{\text{ungerade Funktion}} dt}_{=0} + \underbrace{\int_{-a}^{a} (-a^2+t^2)^2 \, dt} + \underbrace{\int_{-a}^{a} \cos t \, dt}$$

$$\int_{-a}^{a} (-a^2+t^2)^2 \, dt = \int_{-a}^{a} \left(a^4 - 2a^2t^2 + t^4\right) dt = \left[a^4 t - 2a^2 \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_{t=-a}^{t=a}$$

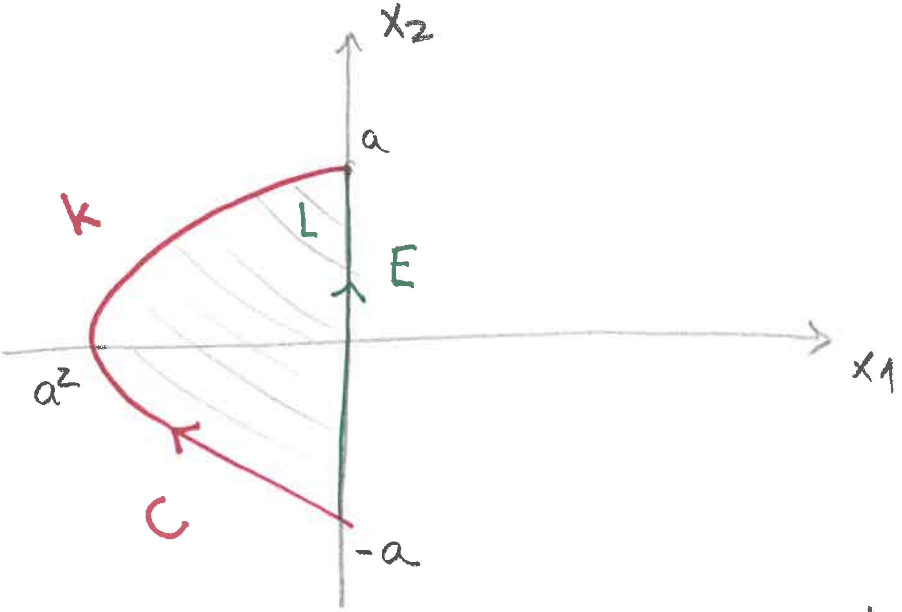
$$\int_{-a}^{a} \cos t \, dt = \Big[\sin t\Big]_{t=-a}^{t=a} = \sin(a) - \sin(-a) = 2\sin(a)$$

$$= 2a^5 - \frac{4}{3}a^5 + \frac{2}{5}a^5 + 2\sin(a)$$

$$= \frac{16}{15}a^5 + 2\sin(a).$$

(b) $\int_K h(x) \cdot dx$

Da $\operatorname{rot}(h) = 0$, statt nochmal $\int_K h(x) \cdot dx$ mit der Parametrisierung von K zu rechnen, benutzen wir Satz von Green.



Sei L = ~~die Kurve Ger~~ Segment längs x_2-Achse von $(0,-a)$ nach $(0,a)$

$\Rightarrow K \cup L$ ist eine geschlossene Kurve (einfach, stückweise glatt)

Sei J = Gebiet mit Rand $K \cup L$

Wir orientieren den Rand von J positiv, d.h. $-K \cup L$

$\Rightarrow$ (Satz von Green) $\underbrace{\iint_J \underbrace{\operatorname{rot}(h)}_{=0} \, dx_1 \, dx_2}_{=0} = \int_{-K \cup L} h(x) \cdot dx$

$$= - \int_K h(x) \cdot dx + \int_L h(x) \cdot dx$$

Es folgt

$$\int_K h(x) \cdot dx = \int_L h(x) \cdot dx$$

- Eine Parametriesierung von L kompatibel mit der Orientierung

$$E(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \qquad -a \leq t \leq a$$

$$\Rightarrow E'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $$\int_L h(x) \cdot dx = \int_{-a}^{a} h(E(t)) \cdot E'(t)\, dt = \int_{-a}^{a} \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_{-a}^{a} (t+1)\, dt$$

$$= 2a. \Rightarrow \boxed{\int_K h(x) \cdot dx = 2a}$$

mit der Orientierung von
Anfangpunkt: $(0,-a)$
nach Endpunkt $(0,a)$!

Sie können versuchen auch das Integral $\int_K h(x) \cdot dx$ direkt zu rechnen (mit der Parametriesierung von K, die wir in Teil (a) benutzt haben).

Sie sollen auch 2a bekommen.

Aber mit Satz von Green ist das Ergebnis einfacher zu bekommen, da $\mathrm{rot}(h) = 0$.